This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

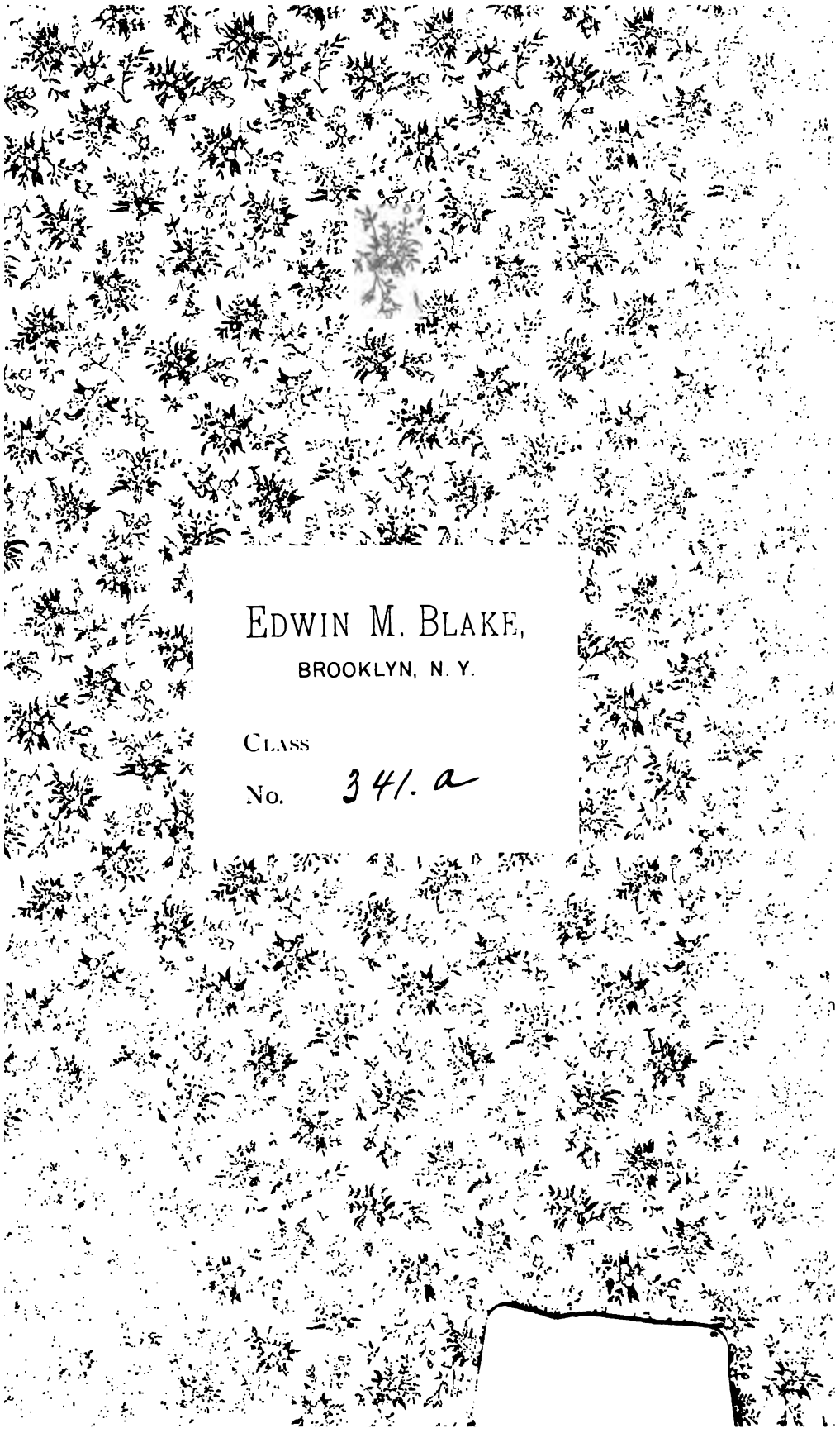
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



EDWIN M. BLAKE,
BROOKLYN, N. Y.

CLASS
No. 341.a

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARY
515
K72
Bequest of
Robert Edgar Allardice, Esq.

EINLEITUNG

IN DIE

ALLGEMEINE THEORIE

DER

KRUMMEN FLÄCHEN.

EINLEITUNG

IN DIE

ALLGEMEINE THEORIE

DER

KRUMMEN FLÄCHEN

VON

DR. JOHANNES KNOBLAUCH,
PRIVATDOCENTEN AN DER UNIVERSITÄT BERLIN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1888.

371552

Vorwort.

Die Entwickelung, welche die allgemeine Theorie der Flächen in den letzten Jahrzehnten genommen hat, beruht wesentlich auf ihrem Zusammenhange mit der Theorie der binären Differentialformen. Diesen Zusammenhang darzulegen und zu verwerten, ist eine Hauptaufgabe der vorliegenden Schrift. Die Untersuchung der Flächen wird demgemäss auf Grund der Gauss'schen Darstellungsweise durchgeführt, die wichtigsten Resultate jedoch auch für die Annahme gegeben, dass die Fläche durch eine Gleichung zwischen Cartesischen Coordinaten definirt ist. Hinsichtlich der Formeln, welche von den Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Coordinaten abhängen, ist das Streben nach Vollständigkeit massgebend gewesen, um das gegebene Material für die Discussion specieller Flächenklassen möglichst brauchbar zu machen. In dieser Schrift selbst werden specielle Flächen nur beispielsweise behandelt.

Der Text enthält keine Citationen, und auch die Literatur-Zusammenstellung am Schluss gibt nur die Titel weniger Abhandlungen von fundamentaler Bedeutung. Der Grund hiervon ist, dass der Verfasser an anderer Stelle eine vollständige Uebersicht über die flächentheoretische Literatur zu geben beabsichtigt.

Berlin, Mai 1888.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Seite

Untersuchung einer Fläche in der Nähe eines gegebenen Punktes.

§ 1. Die verschiedenen Darstellungen einer Fläche. Krummlinige Coordinaten 1
§ 2. Linienelement. Fundamentalgrössen erster Ordnung 3
§ 3. Bogenelemente und Winkel der Coordinatenlinien 5
§ 4. Tangentialebene. Winkel zweier Richtungen in derselben 7
§ 5. Transformation der Fundamentalgrössen erster Ordnung 11
§ 6. Winkel zweier Curven auf einer Fläche 15
§ 7. Verschiedene Formen der Gleichung der Tangentialebene 17
§ 8. Gleichungen und Richtungscosinus (X, Y, Z) der Normale 19
§ 9. Krümmung eines ebenen Schnittes der Fläche, speciell eines Normalschnitts. Fundamentalgrössen zweiter Ordnung. Meusnier'scher Satz 22
§ 10. Bestimmung des Vorzeichens für den Krümmungsradius eines Normalschnitts 25
§ 11. Zusammenhang der Ableitungen von X, Y, Z mit denen der Coordinaten x, y, z 27
§ 12. Haupttangenten, Hauptschnitte und Hauptkrümmungsradien. Orthogonalität der Hauptschnitte. Kreispunkte 30
§ 13. Der Euler'sche Satz 33
§ 14. Folgerungen aus dem Euler'schen Satze. Asymptotische Richtungen, Inflexionstangenten 35
§ 15. Formeln zwischen den Fundamentalgrössen und den symmetrischen Functionen H und K der Hauptkrümmungen 38
§ 16. Die Ausdrücke der Fundamentalgrössen, der Hauptkrümmungsradien etc. für die Darstellung $z = \varphi(x, y)$ der Fläche 39
§ 17. Die Kugel (und Ebene) als Ort von Kreispunkten 42
§ 18. Die Bestimmungsgleichung der Hauptkrümmungsradien für die Flächendarstellung $F(x, y, z) = 0$ 43
§ 19. Hauptkrümmungsradien und Linienelement einer Rotationsfläche. Linien sphärischer Krümmung 45
§ 20. Der Dupin'sche Kegelschnitt 49
§ 21, 22. Theorie der conjugirten Tangenten einer Fläche 53
§ 23. Ausdruck der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung durch die der ersten Ordnung und geometrische Grössen 58
§ 24. Abbildung einer Fläche auf die Einheitskugel. Totalkrümmung und Krümmungsmass 61
§ 25. Theorie der Gauss'schen Kugel. Einführung ihrer Fundamentalgrössen in die flächentheoretischen Formeln 64
§ 26. Beziehungen benachbarter Normalen. Hamilton'scher Satz. Bedingung eines Normalensystems 67
§ 27. Ausdruck des Krümmungsmasses durch die Fundamentalgrössen erster Ordnung und ihre Ableitungen. Der Gauss'sche Satz 72
§ 28, 29. Die drei Fundamentalgleichungen 77
§ 30. Die Hauptformeln der Krümmungstheorie für Tangentialcoordinaten . 83
§ 31. Ueber die Berührung zweier Flächen. Osculirende Paraboloide . . . 86
§ 32. Der geometrische Ort der Krümmungskreise aller Normalschnitte eines Flächenpunktes 90
§ 33. Normalschnitte, welche von ihrem Krümmungskreise superosculirt werden. Fundamentalgrössen dritter Ordnung 92

Seite
§ 34. Beziehungen zwischen diesen und den Ableitungen von H und K. . 96
§ 35. Die Differentiale der Hauptkrümmungen 97
§ 36. Die Fundamentalgrössen der Gauss'schen Kugel und die Grössen dritter Ordnung für die Darstellung $z = \varphi(x, y)$ 99

II. Abschnitt.

Besondere Curven und Coordinatensysteme auf einer Fläche.

§ 37. Orthogonale Coordinatenlinien 100
§ 38. Conjugirte Coordinatenlinien 102
§ 39. Kürzester Abstand benachbarter Geraden einer Schaar 103
§ 40. Krümmungslinien 106
§ 41. Ihre Differentialgleichung für $z = \varphi(x, y)$ und $F(x, y, z) = 0$ . . 108
§ 42. Die Krümmungscurven der Mittelpunktsflächen zweiten Grades . . . 109
§ 43. Für die Flächen zweiten Grades und die Rotationsflächen bilden die Krümmungslinien ein isometrisches System 115
§ 44. Krümmungscurven als Coordinatenlinien. 116
§ 45. Der Dupin'sche Satz über Orthogonalflächen 120
§ 46. Asymptotencurven 122
§ 47. Die Asymptotenlinien auf den geradlinigen Flächen, den Flächen zweiten Grades und den Rotationsflächen 123
§ 48. Asymptotencurven als Coordinatenlinien 126
§ 49. Isometrische Curven 127
§ 50. Conforme Abbildung einer Fläche auf eine andere 130
§ 51. Abbildung eines Rotationsellipsoids auf eine Ebene 132
§ 52. Bedingung der Isometrie eines Curvensystems. Isometrische Coordinaten 134
§ 53, 54. Kürzeste Linien 137
§ 55. Die geodätischen Linien auf der Kugel und dem Ellipsoid 143
§ 56. Die geodätischen Linien auf Rotationsflächen 147
§ 57. Satz von Liouville über die Bestimmbarkeit geodätischer Linien durch Quadraturen 149
§ 58. Orthogonal-geodätische Coordinaten. 151
§ 59. Zur Theorie der geodätischen Parallelcurven. 155

III. Abschnitt.

Transformation binärer Differentialformen.

§ 60. Zusammenhang der Flächentheorie mit der Theorie der binären Differentialformen 159
§ 61. Transformation einer quadratischen Differentialform. Transformationsformeln für die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung 160
§ 62. Die Determinante der Differentialform als Invariante. Umwandlung der Transformationsgleichungen 162
§ 63. Transformation einer bilinearen Differentialform. Die Functionen $\Delta_a^1(\chi)$, $\Delta_a(\chi, \varpi)$ 164
§ 64. Die Function $\Delta_a^2(\chi)$ 166
§ 65. Ausdrücke der zweiten Ableitungen der neuen Variablen nach den alten 168
§ 66. Die Invariante einer quadratischen Differentialform, welche dem Krümmungsmass entspricht 173
§ 67. Weingarten'scher Ausdruck dieser Invariante 176
§ 68. Differentialparameter erster und zweiter Ordnung. Zwischenparameter 177
§ 69. Bedingung für eine isometrische Curvenschaar. Weitere Anwendungen der Differentialparameter 179
§ 70. Simultane Transformation zweier quadratischen Differentialformen. Invarianten und Covarianten 182
§ 71. Anwendungen auf die Flächentheorie 184
§ 72. Das Doppelverhältnis zweier Tangentenpaare einer Fläche 187

Seite
§ 73. Involution von Tangentenpaaren 189
§ 74. Transformation derjenigen Grössenverbindungen, deren Verschwinden in der Flächentheorie die Fundamentalgleichungen liefert 192
§ 75. Herstellung einer cubischen Differentialform, welche gleichzeitig mit zwei quadratischen transformirt wird 195
§ 76. Einige allgemeine Sätze über die Bildung von Invarianten und Covarianten 198
§ 77. Anwendungen auf eine cubische Differentialform 201
§ 78. Transformation zu den Parametern der Krümmungslinien. Umwandlung der Fundamentalgleichungen. Weitere flächentheoretische Anwendungen 204

IV. Abschnitt.

Specielle Flächen, welche mit einer gegebenen zusammenhängen.

§ 79. Darstellung der Krümmungsmittelpunktsfläche oder Evolute einer gegebenen Fläche 209
§ 80. Die Evoluten der Rotationsflächen und des Ellipsoids 211
§ 81. Fundamentalgrössen erster Ordnung und Richtungscosinus der Normale einer Evolute 213
§ 82. Fundamentalgrössen zweiter Ordnung 216
§ 83. Die Grundformeln für die Evoluten unter der Voraussetzung, dass die Coordinatenlinien den Krümmungscurven der Evolvente entsprechen . 217
§ 84. Die Evoluten für orthogonal-geodätische Coordinaten. Der Weingarten'sche Satz 221
§ 85. Zweiter Beweis des Weingarten'schen Satzes. Asymptotenlinien der Evoluten 225
§ 86. Bestimmung der Evolvente und der zweiten Schale der Evolute, wenn eine Schale der letzteren gegeben 228
§ 87. Umkehrung des Weingarten'schen Satzes 232
§ 88. Parallelflächen 234

V. Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Curven auf gegebener Fläche.

§ 89. Die Frenet'schen Formeln 238
§ 90. Geodätische Krümmung. Zusammenhang mit der ersten und der Normalkrümmung 242
§ 91. Die geodätische Krümmung einer Curve, welche durch eine Gleichung zwischen krummlinigen Coordinaten gegeben ist 244
§ 92. Transformation des gefundenen Wertes 247
§ 93. Unveränderlichkeit der geodätischen Krümmung bei einer Biegung der Fläche. Invariable und absolute Functionen 249
§ 94. Curven, welche bei gegebener Bogenlänge ein möglichst grosses Stück einer Fläche begrenzen 251
§ 95. Orthogonale Linien constanter geodätischer Krümmung als isometrische Curven 253
§ 96. Torsion der Asymptotencurven und der geodätischen Linien. Geodätische Torsion 257
§ 97. Einführung der Flächen-Normale und zweier durch sie bestimmten Geraden in die Theorie der Curven 259
§ 98. Drei Differentialrelationen. Sätze aus der Theorie der Krümmungslinien 261
Literatur 264
Alphabetisches Sachregister 265

I. Abschnitt.

Untersuchung einer Fläche in der Nähe eines gegebenen Punktes.

§ 1.

Wenn es sich darum handelt, auf analytischem Wege eine Einsicht in die Natur geometrischer Gebilde zu erlangen, so kommt es vor allem darauf an, diese Gebilde in zweckmässiger Weise darzustellen. Für die krummen Flächen empfiehlt sich, insofern ihre allgemeinen Eigenschaften in Betracht kommen, ganz besonders diejenige Art der Darstellung, welche zuerst von Gauss planmässig in Anwendung gebracht worden ist. Sie besteht darin, die (rechtwinkligen oder schiefwinkligen) Coordinaten der Flächenpunkte als Functionen zweier unabhängigen Variablen aufzufassen. Es werde gesetzt:

$$\text{(I)} \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v).$$

Von den in diesen Gleichungen vorkommenden Grössen gelten, falls nicht in speciellen Fällen etwas Anderes bestimmt wird, folgende Voraussetzungen: x, y, z sind rechtwinklige, Cartesische Coordinaten, bezogen auf ein im Raume festes Axensystem; u, v reelle Variable; f, g, h reelle Functionen dieser Grössen, welche für jedes Wertepaar (u, v) innerhalb eines gewissen, für u und v vorgeschriebenen Bereiches eindeutig definirt, endlich und stetig sind. Unter einer Fläche schlechthin soll stets ein Flächenstück verstanden werden, dessen Ausdehnung den für u und v gegebenen Intervallen entspricht. Wird ein Punkt A der Fläche durch Angabe der speciellen Werte $u = u_0$, $v = v_0$ bestimmt, so soll diese Beziehung zwischen Punkt und Wertepaar durch

$$A \equiv (u_0, v_0)$$

gekennzeichnet werden. Denkt man sich unter u und v Cartesische Coordinaten in einer Ebene, so wird jedem Punkte eines Stückes dieser Ebene ein Punkt des Flächenstücks eindeutig zugeordnet.

Die eben über f, g, h getroffenen Festsetzungen reichen noch nicht aus, um den Inbegriff der durch (I) gegebenen Punkte des Raumes als ein Gebilde zu charakterisiren, welches wir, von der Anschauung aus-

gehend, mit dem Namen einer Fläche belegen. Auf einer Fläche muss man im Allgemeinen von einem beliebigen Punkte aus nach allen Richtungen hin Curvenelemente ziehen können, und mit der Vorstellung einer Curve ist wiederum die der Tangente auf das Engste verbunden. Aus diesem Grunde sind die Functionen f, g, h noch gewissen Bedingungen der Differentiirbarkeit zu unterwerfen, welche im nächsten Paragraphen präcisirt werden sollen. Ob man auch denjenigen Mannigfaltigkeiten, welche durch nicht-differentiirbare Functionen dargestellt werden, eine geometrische Existenz zuweisen könne, braucht hier schon deshalb nicht erörtert zu werden, weil von solchen Mannigfaltigkeiten nur eine äusserst geringe Anzahl von Eigenschaften auszusagen wäre. Sind doch Eigenschaften immer nur eine Folge von Beschränkungen, welche den allgemeinen Begriffen oder Vorstellungen hinzugefügt werden.

Gibt man in den Gleichungen (I) der Grösse v einen constanten Wert v_0, so stellen sie eine auf der Fläche gelegene Curve dar. Insofern für diese noch u variabel ist, soll sie als eine u-Linie bezeichnet werden. Lässt man v_0 das für v vorgeschriebene Intervall stetig durchlaufen, so erhält man eine ganze Schaar solcher Curven. Ebenso liefert die Annahme $u = u_0$, wenn man u_0 alle möglichen Werte erteilt, ein zweites System von Curven, die v-Linien. Ein beliebiger Punkt des Flächenstückes, welcher einem Wertepaar (u_0, v_0) entspricht, kann also als Durchschnitt einer v-Linie mit einer u-Linie aufgefasst werden. In Folge dessen werden diese Linien auch als Coordinatenlinien der Fläche, u und v selbst als die krummlinigen Coordinaten der Flächenpunkte bezeichnet. Im Folgenden verstehen wir unter „Coordinaten“ ohne weiteren Zusatz stets die krummlinigen Coordinaten; die Grössen x, y, z werden, wo es nötig ist, als Cartesische Coordinaten von jenen unterschieden werden.

Es ist, wie noch bemerkt sei, vorläufig nicht ausgeschlossen, dass verschiedenen Wertepaaren (u, v) derselbe Flächenpunkt entspricht.

Setzt man zwischen u und v eine functionale Beziehung fest, etwa so, dass beide Variablen eindeutige Functionen einer Unabhängigen t werden, so werden vermöge (I) auch x, y, z Functionen von t und stellen wiederum eine Curve dar, welche auf der Fläche liegt und bei der obigen Annahme über die Bedeutung der Grössen u, v als Abbild einer ebenen Curve betrachtet werden kann. Dass die neu eingeführten Functionen analoge Bedingungen erfüllen müssen wie f, g, h, versteht sich von selbst.

Eliminirt man u und v aus den Gleichungen (I), so ergibt sich für die Fläche eine Gleichung zwischen Cartesischen Coordinaten:

(II) $$F(x, y, z) = 0.$$

Diese Darstellungsweise ist für allgemeine Untersuchungen weit weniger geeignet als die erste; doch kann bei speciellen Aufgaben die Fläche in der Form (II) gegeben sein, sodass es nützlich ist, die Hauptformeln auch für sie zu kennen.

Endlich ist die Darstellung

(III) $$z = \varphi(x, y)$$

zu bemerken, welche aus (II) durch Auflösung nach einer Coordinate, oder aus (I) durch die Annahmen $f(u, v) = u$, $g(u, v) = v$ hervorgeht. Sie ist trotz ihrer unsymmetrischen Form für manche Untersuchungen nützlich.

Beispiel: Es sei eine Fläche definirt durch die Gleichungen

(1) $$\begin{cases} x = a \cos u \cos v \\ y = b \cos u \sin v \\ z = c \sin u. \end{cases}$$

Der Bereich der unabhängigen Variablen ist hier unbegrenzt. Doch genügt es wegen der Periodicität der auftretenden trigonometrischen Functionen, die Grössen u und v die Werte

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$
$$0 < v < 2\pi$$

durchlaufen zu lassen. Werden die u, v eliminirt, so ergibt sich die betrachtete Fläche als das Ellipsoid

(2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mit den Halbaxen a, b, c. Löst man nach z auf, so folgt

(3) $$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Um die Function rechts zu einer eindeutigen zu machen, ist es nötig, das Zeichen der Quadratwurzel zu fixiren. Die beiden möglichen Annahmen liefern die Punkte der einen oder der anderen Hälfte der Fläche.

Festgesetzt sei noch, dass unter dem Zeichen $\sqrt{a}$, wo $a > 0$, stets der positive Werth der Quadratwurzel verstanden werden soll.

§ 2.

Es sei jetzt (u, v) ein bestimmter Punkt einer gegebenen Fläche, x, y, z seine Cartesischen Coordinaten, welche aus den Gleichungen § 1 (I) folgen würden. Die krummlinigen Coordinaten u, v denken wir uns um Incremente du, dv vermehrt, welche fähig sind, ihren ab-

soluten Werten nach beliebig klein zu werden. Alsdann sollen die beiden Punkte (u, v) und $(u + du, v + dv)$ als unendlich nahe oder benachbarte Punkte der Fläche bezeichnet werden. Die Cartesischen Coordinaten des zweiten werden gegeben durch die Ausdrücke

$$f(u + du, v + dv), \quad g(u + du, v + dv), \quad h(u + du, v + dv).$$

Wir nehmen nun an, es gelte für jede der Functionen f, g, h eine Entwickelung der Form

$$f(u + du, v + dv) = f(u, v) + \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + U du + V dv,$$

wo U, V gleichzeitig mit du, dv unendlich klein werden. Dies tritt sicher dann ein, wenn für den betrachteten Bereich der Grössen u, v die ersten partiellen Ableitungen der drei Functionen existiren, und selbst, ebenso wie diese, eindeutige, endliche und stetige Functionen der unabhängigen Variablen sind. Bleibt man nun, den Principien der Differentialrechnung gemäss, bei den unendlich kleinen Grössen erster Ordnung stehen, sofern dies möglich ist, d. h. sobald für keine der drei Functionen die Ableitungen nach u und v gleichzeitig verschwinden, so erhält man für die Incremente der Cartesischen Coordinaten die Werte:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv$$

$$dz = \frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv.$$

Nun wird das Quadrat des Abstandes ds der beiden benachbarten Punkte gegeben durch:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

und es kann ds wegen seiner unendlichen Kleinheit als auf der Fläche selbst gemessen betrachtet werden. Führt man für $\frac{\partial f}{\partial u}$ etc. die Zeichen $\frac{\partial x}{\partial u}$ etc. ein und setzt bleibend:

$$(1) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = F \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G, \end{cases}$$

so wird ds bestimmt durch die Gleichung:

$$(2) \qquad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Der hieraus folgende Wert von ds, welcher stets positiv genommen

werden soll, heisst das Linienelement der gegebenen Fläche; E, F, G werden bezeichnet als die Fundamentalgrössen erster Ordnung.

Die Werte der Fundamentalgrössen sind unabhängig von der Wahl der rechtwinkligen Coordinatenaxen, auf welche die Fläche bezogen wird. Dies kann auf directem Wege leicht folgendermassen gezeigt werden. Es seien x', y', z' die Coordinaten des Punktes (x, y, z) in einem zweiten Axensystem, so ist für x_0, a, b, c etc. als constante Grössen:

$$x' = x_0 + ax + a'y + a''z$$
$$y' = y_0 + bx + b'y + b''z$$
$$z' = z_0 + cx + c'y + c''z,$$

und es folgt:

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + (a'^2 + b'^2 + c'^2)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$
$$+ (a''^2 + b''^2 + c''^2)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + 2(a'a'' + b'b'' + c'c'')\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$+ 2(a''a + b''b + c''c)\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + 2(aa' + bb' + cc')\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Vermöge der bekannten Relationen unter den Coefficienten einer orthogonalen Transformation sind hierin die Coefficienten von $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$ etc. gleich 1, die von $\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}$ etc. gleich 0, mithin bleibt:

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E.$$

In derselben Art folgt die Behauptung für F und G.

§ 3.

Geht man von einem Punkte $A \equiv (u, v)$ auf der (oder einer) ihn enthaltenden u-Linie zu dem benachbarten Punkte $B \equiv (u + du, v)$ fort und bezeichnet mit $x + dx'$, $y + dy'$, $z + dz'$ die Cartesischen Coordinaten von B, mit ds' das Bogenelement AB, so sind die Cosinus der Winkel α', β', γ', welche die Richtung von A nach B mit den positiven Coordinatenaxen bildet, gegeben durch

$$\frac{dx'}{ds'}, \quad \frac{dy'}{ds'}, \quad \frac{dz'}{ds'}.$$

Hierbei gehen die Grössen $dx', \ldots ds'$ aus $dx, \ldots ds$ durch die Annahme $dv = 0$ hervor. Es ist also

$$dx' = \frac{\partial x}{\partial u} du, \ \ldots \ ds' = \pm \sqrt{E} \, . \, du.$$

Ist du positiv, so soll die obige Fortgangsrichtung als positive Richtung der u-Linie bezeichnet werden. Für diese ergibt sich $ds' = \sqrt{E}\,du$,

$$(1) \qquad \cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos\beta' = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos\gamma' = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Analog geht die positive Richtung der v-Linie von (u, v) nach $(u, v + dv)$ für positives dv; und es gelten die Gleichungen $ds'' = \sqrt{G}\,.\,dv$,

$$(2) \qquad \cos\alpha'' = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \cos\beta'' = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \cos\gamma'' = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Der Cosinus des Winkels ϑ der beiden positiven Coordinatenlinien wird

$$\begin{aligned}\cos\vartheta &= \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\end{aligned}$$

oder

$$(3) \qquad \cos\vartheta = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Hieraus folgt noch:

$$(4) \qquad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} = \frac{T}{\sqrt{EG}},$$

wenn

$$(5) \qquad \sqrt{EG - F^2} = T$$

gesetzt wird, und

$$(6) \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{T}{F}.$$

Der Winkel ϑ kann und soll stets $\leqq \pi$ vorausgesetzt werden. Dann sind auch in (4) die Quadratwurzeln positiv zu nehmen.

Aus (3) folgt: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Coordinatenlinien sich überall senkrecht schneiden, ist das identische Bestehen der Gleichung

$$F = 0.$$

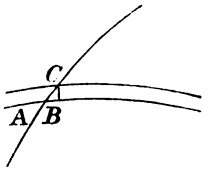
Wir fügen jetzt über E, F, G noch folgende Voraussetzungen hinzu. Die Grössen E und G, welche im Allgemeinen > 0 sind, sollen niemals $= 0$ werden. Hat man es, wie angenommen, blos mit reellen Punkten zu thun, so könnte nach § 2 (1) E nur dann verschwinden, wenn $\frac{\partial x}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$ wäre; das gleichzeitige Bestehen dieser drei Gleichungen, sowie der entsprechenden für v, wird also ausgeschlossen. Die Grösse T, deren Quadrat sich leicht in die Form

$$(7) \qquad \begin{aligned}EG - F^2 = &\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\end{aligned}$$

setzen lässt, also im Allgemeinen ebenfalls positiv ist, soll ebenso wenig Null werden können wie E und G. — Bestände die Gleichung $T = 0$ für alle Wertepaare eines gewissen Bereiches, so würde man es nicht mehr mit einer Fläche, sondern mit einer Curve zu thun haben. Denn die Gleichung $\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0$ und die beiden analogen besagen, dass zwei Relationen zwischen x, y und z stattfinden.

Für $T > 0$ ist $\sin\vartheta$ von Null verschieden, ϑ selbst niemals $= 0$ oder $= \pi$, und die Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ berühren sich nirgends. Es sei ferner $A \equiv (u, v)$ ein beliebiger Punkt der Fläche, $C \equiv (u, v + dv)$ ein benachbarter auf der durch A gehenden v-Linie. Durch A und C sollen die entsprechenden u-Linien construirt werden. Ein dritter Punkt B, auf der u-Linie von A, werde dadurch erhalten, dass man von C aus auf diese Linie eine Normale fällt. In dem unendlich kleinen, als geradlinig zu betrachtenden Dreieck ABC ist

Fig. 1.



$$\widehat{BAC} = \vartheta \quad \text{oder} \quad = \pi - \vartheta,$$

$$BC = AC \sin\vartheta = ds'' \sin\vartheta = \pm\sqrt{G}\sin\vartheta\, dv.$$

Der Abstand BC ist, da G und $\sin\vartheta$ nicht Null sind, von derselben Ordnung wie dv; oder die aufeinanderfolgenden Curven der Schaar $v = \text{const.}$ laufen einander unendlich nahe, ohne sich jedoch jemals zu schneiden oder zu berühren. Dasselbe gilt von den v-Linien.

Die bisher gemachten Voraussetzungen beziehen sich teils auf gewisse Eigenschaften der darstellenden Functionen f, g, ..., teils involviren sie eine Beschränkung der Variabilität von u und v. In letzterer Hinsicht erscheint es angemessen, vor allem die Forderung zu stellen, dass die gegenseitige Beziehung der Flächenpunkte und der Wertepaare (u, v) eine eindeutige sei, dass also jedem Punkte nur ein Paar krummliniger Coordinaten entspreche. So könnte man in dem Beispiel des § 1 die Coordinaten eines Flächenpunktes A um 2π vermehren und erhielte dann denselben Punkt wieder; allein es ist offenbar zweckmässig, u und v auf den dort angegebenen Bereich zu beschränken.

§ 4.

Es seien

$$A \equiv (u, v) \equiv (x, y, z)$$

und

$$B \equiv (u + du, v + dv) \equiv (x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$$

zwei unendlich nahe Punkte der Fläche, das sie verbindende Linienelement $AB = ds$. Die Grössen $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ können als Richtungscosinus einer

χ, $\bar{\omega}$ nach ihren Argumenten seien dieselben Bedingungen festgesetzt, und es sollen endlich für keine Stelle des Bereichs die beiden Ableitungen einer und derselben Function gleichzeitig verschwinden.

Die Cartesischen Coordinaten mögen, in den neuen Coordinaten ausgedrückt, durch die Gleichungen

$$(3)\quad x = \bar{f}(u', v') = \bar{x},\quad y = \bar{g}(u', v') = \bar{y},\quad z = \bar{h}(u', v') = \bar{z}$$

gegeben sein. Es geht also z. B. die Relation

$$f(u, v) = \bar{f}(u', v')$$

vermöge der Gleichungen (1) oder (2) in eine Identität über. Nun ist

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u'}\dfrac{\partial u'}{\partial u} + \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v'}\dfrac{\partial v'}{\partial u}, \ldots \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u'}\dfrac{\partial u'}{\partial v} + \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v'}\dfrac{\partial v'}{\partial v}, \ldots, \end{cases}$$

und analog

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u'} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial u'} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial u'}, \ldots \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v'} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial v'} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial v'}, \ldots. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (4) folgt, wenn die Fundamentalgrössen für die Coordinaten u', v' mit E', F', G' bezeichnet werden, nach § 2 (1):

$$(6)\quad \begin{cases} E = E'\left(\dfrac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F'\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial u} + G'\left(\dfrac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \\ F = E'\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial u'}{\partial v} + F'\left(\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial v} + \dfrac{\partial v'}{\partial u}\dfrac{\partial u'}{\partial v}\right) + G'\dfrac{\partial v'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial v} \\ G = E'\left(\dfrac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F'\dfrac{\partial u'}{\partial v}\dfrac{\partial v'}{\partial v} + G'\left(\dfrac{\partial v'}{\partial v}\right)^2, \end{cases}$$

und aus den umgekehrten Relationen (5) eine zweite Reihe von Gleichungen, welche sich aus (6) durch Vertauschung von u, v, E, F, G mit u', v', E', F', G' ergibt. Die erste dieser Gleichungen,

$$E' = E\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial u'} + G\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2,$$

lässt leicht erkennen, dass E' positiv ist. Denn die quadratische Form der Grössen $\frac{\partial u}{\partial u'}$, $\frac{\partial v}{\partial u'}$, um welche es sich handelt, kann geschrieben werden:

$$E' = \frac{1}{E}\left[\left(E\frac{\partial u}{\partial u'} + F\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2 + (EG - F^2)\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2\right]$$

und ist wesentlich positiv, weil E und $EG - F^2 > 0$ sind. Dasselbe gilt für G'. Ferner ist

$$E'G' - F'^2 = \begin{vmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E\frac{\partial u}{\partial u'} + F\frac{\partial v}{\partial u'}, & F\frac{\partial u}{\partial u'} + G\frac{\partial v}{\partial u'} \\ E\frac{\partial u}{\partial v'} + F\frac{\partial v}{\partial v'}, & F\frac{\partial u}{\partial v'} + G\frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'}, & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'}, & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix}^2.$$

Es werde noch für die Functionaldeterminante der u, v nach den u', v' die Abkürzung eingeführt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix} = \Delta,$$

so folgt schliesslich

$$E'G' - F'^2 = (EG - F^2) \cdot \Delta^2, \tag{7}$$

und es ist auch $E'G' - F'^2$ positiv. Unter den für die Transformation geltenden Voraussetzungen genügen mithin die neuen Grössen E', G', $E'G' - F'^2$ denselben Bedingungen, welche im § 3 für E, G, $EG - F^2$ festgesetzt wurden.

Combinirt man die Gleichungen (4) und (5), so erhält man Relationen unter den Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial u'}, \ldots, \frac{\partial u'}{\partial u}, \ldots$, welche sich auch auf folgende Weise ergeben. Es ist, je nachdem man u, v als Functionen von u', v' betrachtet, oder umgekehrt:

$$du = \frac{\partial u}{\partial u'}du' + \frac{\partial u}{\partial v'}dv', \quad dv = \frac{\partial v}{\partial u'}du' + \frac{\partial v}{\partial v'}dv' \tag{8}$$

$$du' = \frac{\partial u'}{\partial u}du + \frac{\partial u'}{\partial v}dv, \quad dv' = \frac{\partial v'}{\partial u}du + \frac{\partial v'}{\partial v}dv. \tag{9}$$

Entnimmt man aus (8) die Werte von du' und dv' und substituirt sie in (9), so wird

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial v}{\partial v'}du - \frac{\partial u}{\partial v'}dv\right) = \frac{\partial u'}{\partial u}du + \frac{\partial u'}{\partial v}dv$$

$$\frac{1}{\Delta}\left(-\frac{\partial v}{\partial u'}du + \frac{\partial u}{\partial u'}dv\right) = \frac{\partial v'}{\partial u}du + \frac{\partial v'}{\partial v}dv,$$

woraus die häufig gebrauchten Umkehrungsformeln folgen:

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial v}{\partial v'}, \quad \frac{\partial u'}{\partial v} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial v'},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial u} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial v}{\partial u'}, \quad \frac{\partial v'}{\partial v} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial u'}. \tag{10}$$

Setzt man noch

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{vmatrix} = \Delta',$$

so folgt aus (10)

$$\Delta' = \frac{1}{\Delta}. \tag{11}$$

Mit Hilfe der Relationen (10) können die Transformationsformeln für E', F', G' noch in eine andere Form gesetzt werden. Es wird nämlich

$$E' = \Delta^2 \left[E \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 - 2F \frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} + G \left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \right]$$

. . . . . .

und mit Benutzung von (7):

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{E'}{E'G' - F'^2} = \dfrac{E\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} + G\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} \\ \dfrac{-F'}{E'G' - F'^2} = \dfrac{E\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial v} - F\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right) + G\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial u}}{EG - F^2} \\ \dfrac{G'}{E'G' - F'^2} = \dfrac{E\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u} + G\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}. \end{cases}$$

Die Transformationsformeln (6) hätten noch auf einem anderen Wege erhalten werden können als durch Berechnung von E, F, G aus ihren Definitionsgleichungen. Denn diese Grössen sind die Coefficienten der binären quadratischen Differentialform

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

welche als Quadrat des Linienelements zwischen zwei bestimmten Flächenpunkten eine invariante Bedeutung hat, d. h. von dem gewählten Coordinatensystem nicht abhängt. Man hat nur in die Relation

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2,$$

welche aus dieser Bemerkung folgt, die Werte (9) zu substituiren und die Coefficienten von du^2, $2dudv$, dv^2 auf beiden Seiten zu vergleichen.

§ 6.

Um nunmehr den Winkel ϑ' zweier Curven

$$\varphi(u, v) = \text{const.}, \qquad \psi(u, v) = \text{const.} \tag{1}$$

in einem bestimmten Punkte (u, v) zu finden (cf. § 4), denken wir uns die beiden durch (1) dargestellten Schaaren zu Coordinatenlinien gewählt. Die Fundamentalgrössen erster Ordnung für diese Annahme seien E', F', G'. Dann wird nach § 3 (3, 4)

$$\cos\vartheta' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}}, \qquad \sin\vartheta' = \frac{\sqrt{E'G' - F'^2}}{\sqrt{E'G'}},$$

und es folgt aus § 5 (12, 7, 11), wenn man nach (1) die Zeichen u', v' durch φ, ψ ersetzt:

$$(2)\quad \cos\vartheta' = -\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}\cdot\sqrt{E\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2}}$$

$$(3)\quad \sin\vartheta' = \frac{\varepsilon T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}\cdot\sqrt{E\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2}}$$

ε ist ein Vorzeichen, welches so zu wählen ist, dass der ganze Ausdruck positiv wird, d. h. gleich ± 1, je nachdem die Functionaldeterminante $\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$ positiv oder negativ ist.

Es ist noch

$$(4)\qquad \operatorname{tg}\vartheta' = \frac{-\varepsilon T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)}{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}}.$$

Aus (2) ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Curven (1) auf einander senkrecht stehen:

$$(5)\qquad E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0.$$

Sollen die betrachteten Curven, wie angenommen, Coordinatenlinien sein können, so ist notwendig

$$\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} \gtrless 0.$$

Denn sonst wären u' und v' nicht unabhängige Variable. Man kann, von besonderen Fällen abgesehen, auch über das Zeichen der Functionaldeterminante noch verfügen. Angenommen nämlich, sie sei negativ, so setzen wir

$$u' = -u_0'$$

und erhalten

$$\frac{\partial u_0'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u_0'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} > 0.$$

Nun deckt sich der Inbegriff der durch

$$\varphi(u, v) = \text{const.}$$

dargestellten Curven mit derjenigen Curvenschaar, welche durch

$$-\varphi(u, v) = \text{const.}$$

repräsentirt wird. Die Veränderung des Zeichens von u' bewirkt also nur, dass die vorher negative Richtung der u'-Linien als positive gekennzeichnet wird. Von der gegenseitigen Lage der positiven Richtungen der Linien $u = \text{const.}, \ldots v' = \text{const.}$ für $\Delta' > 0$ oder, nach § 5 (11), für $\Delta > 0$, kann man sich leicht eine geometrische Vorstellung machen. Berechnet man nämlich nach § 4 den von der positiven u'-Linie mit der positiven v'-Linie gebildeten, durch positive Drehung entstandenen Winkel w, so erhält man für $\cos w$ denselben Ausdruck wie für $\cos \vartheta'$, für $\sin w$ den Wert von $\sin \vartheta'$ ohne das Zeichen ε (oder es ist $\sin w = \varepsilon \sin \vartheta'$). Ist nun $\Delta' > 0$, so wird $\sin w > 0$, und w liegt zwischen den Grenzen 0 und π. Lässt man demnach die positive u'-Linie mit der positiven u-Linie zusammenfallen, so liegen die positiven Richtungen der beiden anderen Curven auf derselben (nämlich der positiven) Seite der u-Linie.

Für $\Delta > 0$ folgt noch aus § 5 (7):

$$\sqrt{E'G' - F'^2} = \Delta \sqrt{EG - F^2}. \tag{6}$$

Sehr häufig kommt es vor, dass die Bestimmungsgrössen $\frac{dv}{du}$, $\frac{\delta v}{\delta u}$ zweier Tangenten, deren Winkel bestimmt werden soll, durch eine quadratische Gleichung

$$\mathsf{A} \equiv a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 = 0 \tag{7}$$

verbunden sind. a_{11}, a_{12}, a_{22} sind Functionen von u und v, deren Determinante $a_{11}a_{12} - a_{12}^2 = a$ von Null verschieden ist, weil sonst die beiden Tangenten zusammenfallen würden. Für die Realität der letzteren ist ausserdem erforderlich, dass a negativ ist. Wir setzen vorläufig noch a_{11} und a_{22} als $\gtrless 0$ voraus; denn andernfalls zerfiele die quadratische Differentialform A in das Product einer linearen mit du oder dv. — Für variable u, v kennzeichnet sich die Gleichung (7) als eine Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades, deren Integration zwei Curvenschaaren liefern würde. Der Winkel dieser Curven ist wieder mit dem der Tangenten identisch, und kann daher ohne Integration gefunden werden.

Es seien λ_1, λ_2 die Wurzeln der Gleichung (7), sodass

$$\frac{dv}{du} = \lambda_1, \qquad \frac{\delta v}{\delta u} = \lambda_2$$

gesetzt werden kann. Wird dies in § 4 (6) substituirt und mit w

einer der Winkel bezeichnet, welche die in Rede stehenden Tangenten mit einander bilden, so ergibt sich

$$\cos w = \pm \frac{E + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{(E + 2F\lambda_1 + G\lambda_1^2)(E + 2F\lambda_2 + G\lambda_2^2)}},$$

und nach Durchführung der Rechnung, wobei die Relationen

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2a_{12}}{a_{22}}, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}}$$

zu benutzen sind:

$$(8) \quad \cos w = \varepsilon \frac{Ga_{11} - 2Fa_{12} + Ea_{22}}{\sqrt{(Ga_{11} - 2Fa_{12} + Ea_{22})^2 - 4(EG - F^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}$$

$$(9) \quad \sin w = \varepsilon' \frac{2T\sqrt{-(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{\sqrt{(Ga_{11} - 2Fa_{12} + Ea_{22})^2 - 4(EG - F^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}$$

$$(10) \quad \operatorname{tg} w = \varepsilon\varepsilon' \frac{2T\sqrt{-(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{Ga_{11} - 2Fa_{12} + Ea_{22}}.$$

Welche Vorzeichen zu wählen sind, hängt von Zweckmässigkeitsgründen ab. Ist es bei speciellen Aufgaben z. B. vorteilhaft, w als spitzen Winkel zu definiren, so sind ε, ε' so zu bestimmen, dass die Ausdrücke (8, 9) und damit auch (10) positiv werden.

Man überzeugt sich leicht, dass die gefundenen Werte auch giltig bleiben, wenn a_{11} oder a_{22} verschwindet. Sind a_{11} und a_{22} gleichzeitig Null, also a_{12} von Null verschieden, so gehen die in Rede stehenden Curven in die Coordinatenlinien, und die oben berechneten Ausdrücke, abgesehen vom Zeichen, in die im § 3 angegebenen über.

Die Bedingung dafür, dass die Gleichung (7) zwei auf einander senkrechte Tangenten liefert, ist nach (8):

$$(11) \qquad Ga_{11} - 2Fa_{12} + Ea_{22} = 0;$$

und der Ausdruck (9) lehrt, wegen $T > 0$, dass die beiden Geraden nur dann zusammenfallen können, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ist.

§ 7.

Bereits im § 4 wurde die Tangentialebene einer Fläche in einem gegebenen Punkte (xyz) definirt und ihre Gleichung in der Form

$$(1) \qquad A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$$

gegeben. Es sei jetzt die Fläche in der Form (III) (§ 1) dargestellt, so wird

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1,$$

und es werde noch nach Euler

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q \tag{2}$$

gesetzt; dann erhalten die Coefficienten von (1) vermöge § 4 (4) die Werte:

$$A = -p, \qquad B = -q, \qquad C = 1, \tag{3}$$

und die Gleichung der Tangentialebene selbst nimmt die Form an:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y). \tag{4}$$

Endlich sei noch (§ 1)

$$F(x, y, z) = 0 \tag{II}$$

die Gleichung der Fläche, in welcher F nebst den drei partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}, \ldots$ eindeutig, endlich und stetig ist. Dann hat man bekanntlich (für $\frac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0$)

$$p = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad q = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

und die Tangentialebene wird dargestellt durch

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0. \tag{5}$$

Dass diese Gleichung auch für die Punkte gilt, in welchen $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ ist, kann entweder dadurch gezeigt werden, dass man eine andere Variable an Stelle von z bevorzugt, oder auch durch Ableitung der Gleichung (5) auf einem anderen Wege. Es sei durch den Berührungspunkt A eine zweite Fläche

$$G(x, y, z) = 0$$

hindurchgelegt, welche die erste in einer gewissen Curve schneidet. Die Tangente dieser Curve befindet sich unter denen, deren geometrischer Ort bestimmt werden soll. Um die Verhältnisse $dx : dy : dz$ zu berechnen, welche in § 4 (1) auftreten, hat man zu beachten, dass der dem Punkte A unendlich nahe Punkt, welcher mit diesem zusammen die Tangente bestimmt, beiden Flächen gleichzeitig angehört. Demnach gelten die Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz = 0, \end{cases} \tag{6}$$

aus welchen, in Verbindung mit den eben genannten, die Differentialverhältnisse zu eliminiren sind. Bezeichnet τ einen Proportionalitätsfactor, so kann man schreiben

$$dx = \tau(\xi - x), \quad dy = \tau(\eta - y), \quad dz = \tau(\zeta - z),$$

woraus

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial G}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial G}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Die erste Relation ist von G unabhängig, gilt also für alle Tangenten in A. — Man überzeugt sich sofort, dass diese Methode, die Tangentialebene abzuleiten, auch giltig bleibt, wenn $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ ist. Verschwinden zwei Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial y}$ und $\frac{\partial F}{\partial z}$, so reducirt sich die erste Gleichung (6) auf

$$dx = 0.$$

Vermöge § 4 (1) muss daher $\xi - x = 0$ sein, und dies gilt wieder für alle Tangenten in A. Demnach verliert schliesslich die Gleichung (5) nur dann ihre Bedeutung, wenn für den gegebenen Punkt alle drei partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ gleichzeitig mit F verschwinden. Solche singulären Punkte können offenbar nur unter gewissen Bedingungen vorhanden sein. Wir denken sie uns, falls sie existiren, von den hier zu betrachtenden Flächenstücken ausgeschlossen.

§ 8.

Eine gerade Linie, welche auf der Tangentialebene im Berührungspunkte A senkrecht steht, heisst Normale der Fläche für den Punkt A. Ihre Gleichungen ergeben sich aus § 7 für die verschiedenen Darstellungen der Fläche in den Formen

(1) $$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C};$$

(2) $$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0;$$

(3) $$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Es seien noch X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale; dann ist

$$X : Y : Z = A : B : C$$
$$= -p : -q : 1$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

oder, wenn wir uns speciell an die Darstellung (II) (§ 1) der Fläche halten,

$$X = \tau \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \tau \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \tau \frac{\partial F}{\partial z}$$

für τ als einen Proportionalitätsfactor. Hieraus folgt wegen

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1:$$

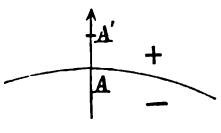
$$\tau = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Setzt man dies ein, so erhält man zwei Systeme von Werten für XYZ, welche den beiden einander entgegengesetzten Richtungen der von A ausgehenden Normale angehören. Man kann diese beiden Richtungen in folgender Weise geometrisch kennzeichnen. Durch die Fläche $F(x, y, z) = 0$ wird der Raum in der Nähe des Punktes A in zwei Teile zerlegt. Setzt man nämlich an die Stelle der Coordinaten x, y, z andere, x', y', z', welche beliebig wenig von den ersteren verschieden sind, jedoch nicht ebenfalls Punkten der Fläche zugehören, so wird entweder

$$F(x', y', z') > 0 \quad \text{oder} \quad F(x', y', z') < 0.$$

Von den Punkten des Raumes, welche die erste oder zweite dieser Ungleichungen befriedigen, wollen wir sagen, dass sie ausserhalb oder innerhalb der Fläche $F = 0$ liegen. Es hat dann einen bestimmten Sinn, von einer nach aussen gerichteten Normale des Punktes A zu sprechen. Allerdings kehrt sich die Normalenrichtung um, sobald man die Flächengleichung mit -1 multiplicirt, wobei die Natur der Fläche selbst ungeändert bleibt. Es sei nun $A' \equiv (x', y', z')$ ein Punkt des Raumes, welcher ausserhalb der Fläche auf der Normale des Punktes A und diesem beliebig nahe gelegen ist, und es werde noch

Fig. 3.



$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy, \quad z' = z + dz$$

gesetzt. Führt man diese Werte in F ein, so ist das Anfangsglied der Entwickelung, $F(x, y, z)$, gleich Null, und bei hinreichender Kleinheit von dx, dy, dz wird das Zeichen des Restausdruckes das von

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = dF.$$

Nun ist der Annahme nach $F(x + dx, y + dy, z + dz) > 0$, also auch $dF > 0$. Es sei $AA' = dw$ der (stets positive) Abstand der

beiden angenommenen Punkte. Bezeichnen dann X, Y, Z die Richtungscosinus der von A nach A' gerichteten Normale, so ist

$$X = \frac{dx}{dw}, \quad Y = \frac{dy}{dw}, \quad Z = \frac{dz}{dw},$$

mithin

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial y} Y + \frac{\partial F}{\partial z} Z\right) dw = \frac{\pm dw \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Sollen beide Seiten auch dem Vorzeichen nach übereinstimmen, so muss rechts das obere Zeichen gelten. Demnach erhält man schliesslich für die Richtungscosinus der nach aussen gehenden Normale:

$$(4) \quad \begin{cases} X = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, & Y = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, \\ Z = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}. \end{cases}$$

Ist speciell

$$F(x, y, z) = z - f(x, y),$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -p, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -q, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

so folgt für die zweite Darstellung der Fläche

$$(5) \quad X = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Um die Gleichungen auch für die dritte Darstellung anzugeben, substituiren wir in

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

die Ausdrücke

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \text{ etc.}$$

und setzen die Coefficienten der als unabhängig zu betrachtenden du und dv einzeln gleich Null. Dann wird

$$p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$p \frac{\partial x}{\partial v} + q \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \text{woraus}$$

$$p = -\frac{A}{C}, \qquad q = -\frac{B}{C}.$$

Beim Einsetzen dieser Werte in (5) sind die Quadratwurzeln so zu bestimmen, dass aus den abzuleitenden Gleichungen für $A = -p$, $B = -q$, $C = 1$ [§ 7 (3)] sich wiederum die Formeln (5) ergeben. So findet sich

$$X = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad Y = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad Z = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Nun besteht für irgendwelche Grössen a, b, c, a', b', c' die leicht zu verificirende Lagrange'sche Identität:

$$(6) \qquad \begin{aligned}&(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2.\end{aligned}$$

Auf unseren Fall angewandt ergibt dieselbe:

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

mithin kann man auch schreiben

$$(7) \qquad X = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad Y = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad Z = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Im Folgenden sollen stets die Grössen X, Y, Z an Stelle von A, B, C Verwendung finden.

§ 9.

Man kann von der Krümmung einer Fläche in einem gegebenen Punkte A eine Vorstellung gewinnen, wenn man das Gesetz kennt, nach welchem sich die Krümmung eines durch A gehenden ebenen Schnitts mit der Lage der Schnittebene ändert. Diese Ebene schneidet die Tangentialebene von A in einer bestimmten Flächentangente t; irgend eine Ebene e des Büschels mit der Axe t wird durch Angabe des Winkels φ fixirt, welchen e mit der durch t und die Flächennormale gehenden Ebene bildet. Dabei soll $\varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ angenommen werden. Nun ist bekanntlich der Krümmungsradius ϱ' einer Curve im Raume gegeben durch

$$(1) \qquad \varrho' = \frac{ds^3}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

worin

$$(2) \qquad \begin{cases} a = dy\,d^2z - dz\,d^2y \\ b = dz\,d^2x - dx\,d^2z \\ c = dx\,d^2y - dy\,d^2x. \end{cases}$$

Da hier zweite Differentiale vorkommen, so setzen wir im Folgenden auch die vier zweiten partiellen Ableitungen jeder der Functionen x, y, z als existirend, eindeutig und stetig voraus. Im Besonderen

folgt aus diesen Annahmen auch die Gleichheit der mittleren Ableitungen $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ und $\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$, etc.

Es kommt nun darauf an, den Ausdruck (1) so zu transformiren, dass die Bestimmungsstücke von t und der Winkel φ darin vorkommen. Was das Vorzeichen betrifft, so ist dasselbe willkürlich und kann z. B. durchgängig positiv genommen werden, wenn man, wie es in der Theorie der ebenen Curven gebräuchlich ist, den Krümmungsradius stets als absolute Grösse betrachtet. Doch soll das Zeichen vorläufig unbestimmt bleiben.

Wir führen nun zunächst den Winkel φ ein. Er ist identisch mit dem Winkel, welchen die Normale der Fläche und die Hauptnormale des ebenen Schnitts mit einander bilden. Die Richtungscosinus der letzteren Geraden sind

$$\frac{cdy - bdz}{\pm ds\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{adz - cdx}{\pm ds\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{bdx - ady}{\pm ds\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

also wird nach § 8:

$$\cos\varphi = \frac{X(cdy - bdz) + Y(adz - cdx) + Z(bdx - ady)}{\pm ds\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Das Zeichen der Quadratwurzel soll dabei so gewählt werden, dass die zugehörige Richtung der Hauptnormale mit der nach aussen gehenden Flächennormale einen spitzen Winkel einschliesst.

Der eben aufgestellte Wert von $\cos\varphi$ lässt beträchtliche Vereinfachungen zu. Es ist nämlich

$$cdy - bdz = dx(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) - d^2x(dx^2 + dy^2 + dz^2), \text{ etc.}$$

Ferner hat man, weil die Flächennormale auf der Geraden t senkrecht steht, deren Richtungscosinus $\frac{dx}{ds}$ etc. sind,

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \tag{3}$$

und speciell

$$\begin{cases} X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \\ X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

wie auch durch Ausrechnung sofort folgen würde. Daher:

$$\cos\varphi = \frac{(Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z)ds}{\mp\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Entnimmt man hieraus $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ und substituirt in (1), so folgt

$$\varrho' = \pm \frac{ds^2 \cdot \cos\varphi}{Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z}. \tag{5}$$

Bei der Bildung der zweiten Differentiale, welche im Nenner vorkommen, ist zu beachten, dass u und v als Functionen einer Variablen zu denken sind, weil man es mit einer bestimmten Curve auf der Fläche zu thun hat. d^2u und d^2v sind also mit zu berücksichtigen, und es wird

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u} d^2u + \frac{\partial x}{\partial v} d^2v$$

etc. Nun seien folgende bleibenden Bezeichnungen eingeführt:

$$(6) \quad \begin{cases} X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = L \\ X\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = M \\ X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = N. \end{cases}$$

Die durch diese Gleichungen definirten Grössen L, M, N sollen als Fundamentalgrössen zweiter Ordnung benannt werden. Sie bleiben, wie man sich durch eine leichte Rechnung überzeugt, bei einer orthogonalen Transformation der Cartesischen Coordinaten ebenso wie die Fundamentalgrössen erster Ordnung (§ 2) ungeändert.

Mit Hilfe der Gleichungen (6) und (4) erhält man nun

$$Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

und weiter, wenn noch für ds^2 sein Ausdruck in du, dv gesetzt wird,

$$(7) \quad \varrho' = \pm \frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2} \cos\varphi.$$

Der erste Factor der rechten Seite hängt nur von dem Verhältnis $\frac{dv}{du}$ ab, welches die Tangente t charakterisirt (vgl. § 4). Er bleibt also unverändert, wenn die schneidende Ebene um t als Axe gedreht wird. Setzt man $\varphi = 0$ und bezeichnet den Krümmungsradius eines die Flächennormale enthaltenden Schnittes — kurz Normalschnitt genannt — mit ϱ, so wird

$$(8) \quad \varrho = \varepsilon \frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2} \quad \text{für } \varepsilon = \pm 1.$$

Es soll nun in allen Fällen

$$\varepsilon = +1$$

genommen werden, sodass ϱ auch negative Werte haben kann. Die geometrische Bedeutung dieser Festsetzung wird sich im nächsten Paragraphen herausstellen. Hiernach ist für jede Lage des Normalschnitts

$$(9) \quad \varrho = \frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}.$$

Den Gegensatz zu den Normalschnitten bilden die schiefen Schnitte. Für einen solchen soll das Vorzeichen des Krümmungsradius ϱ' so bestimmt sein, dass die aus (7) und (9) folgende Gleichung

$$\varrho' = \varrho \cos \varphi \tag{10}$$

auch dem Zeichen nach richtig ist. Diese Gleichung gibt den Meusnier'schen Satz:

Um für einen gegebenen schiefen Schnitt den Krümmungsradius zu finden, construire man den Normalschnitt, welcher durch dieselbe Flächentangente hindurchgeht wie der schiefe Schnitt. Der gesuchte Wert ist gleich der Projection des Krümmungshalbmessers für den Normalschnitt auf die Ebene des schiefen Schnitts.

Da der Cosinus für den Nullwert des Argumentes sein Maximum erreicht, so besagt die Gleichung (10), dass von allen durch eine und dieselbe Tangente hindurchgehenden ebenen Schnitten der Normalschnitt den grössten Krümmungsradius oder die kleinste Krümmung hat.

Der Meusnier'sche Satz lehrt, dass es zur Beurteilung der Krümmungen in einem gegebenen Flächenpunkte ausreicht, die Normalschnitte in Betracht zu ziehen. Dies soll im Folgenden ausschliesslich geschehen.

§ 10.

Es seien jetzt die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes eines Normalschnitts aufzusuchen. Sind ξ, η, ζ diese Coordinaten für irgend eine Raumcurve, so hat man

$$\begin{cases} x - \xi = \dfrac{(c\,dy - b\,dz)\,ds^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ y - \eta = \dfrac{(a\,dz - c\,dx)\,ds^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ z - \zeta = \dfrac{(b\,dx - a\,dy)\,ds^2}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \tag{1}$$

für x, y, z als die Coordinaten desjenigen Curvenpunktes, zu welchem der Krümmungsmittelpunkt $(\xi\,\eta\,\zeta)$ gehört. Für unseren Fall ist die Curve eben, und ihre Ebene enthält die Flächennormale. In Folge dessen steht letztere auf der Binormale der Curve senkrecht, deren Richtungscosinus den Grössen a, b, c proportional sind, und man hat

$$Xa + Yb + Zc = 0. \tag{2}$$

Die Bestimmung von a, b, c kann nun dadurch ausgeführt werden, dass man zu dieser Relation noch die Identität

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0 \tag{3}$$

sowie ihr Differential

$$(4) \qquad Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z + dxdX + dydY + dzdZ = 0$$

hinzunimmt. Multiplicirt man nämlich (3), (4) mit d^2y, $-dy$ resp. d^2z, $-dz$ und addirt, setzt ferner zur Abkürzung

$$dxdX + dydY + dzdZ = J,$$

so folgt

$$Xc - Za = Jdy$$
$$-Xb + Ya = Jdz$$

oder

$$b = \frac{1}{X}(Ya - Jdz), \qquad c = \frac{1}{X}(Za + Jdy),$$

und in Verbindung mit (2) und der Gleichung $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$:

$$a = J(Ydz - Zdy)$$
$$b = J(Zdx - Xdz)$$
$$c = J(Xdy - Ydx).$$

Hieraus ergibt sich durch eine leichte Rechnung:

$$cdy - bdz = JXds^2 \text{ etc.}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = J^2ds^2,$$

und die Bestimmungsgleichungen (1) für ξ, η, ζ werden

$$(5) \qquad x - \xi = X\frac{ds^2}{J}, \quad y - \eta = Y\frac{ds^2}{J}, \quad z - \zeta = Z\frac{ds^2}{J}.$$

Hierin sind noch ds^2 und J durch du, dv auszudrücken. Und zwar erhält man J am einfachsten aus (4) in Verbindung mit § 9:

$$(6) \qquad J = -(Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z)$$
$$= -(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2).$$

Daher wird

$$\xi - x = X\frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}, \ldots,$$

oder nach § 9 (8):

$$(7) \qquad \xi - x = \varepsilon\varrho X, \qquad \eta - y = \varepsilon\varrho Y, \qquad \zeta - z = \varepsilon\varrho Z.$$

Angenommen nun, das Zeichen des Krümmungshalbmessers ϱ sei noch nicht bestimmt; dann setzen wir fest, es solle ϱ positiv oder negativ genommen werden, je nachdem der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der nach aussen oder nach innen gehenden Richtung der Normale liegt. Die Richtungscosinus der vom Flächenpunkte nach dem Krümmungscentrum gehenden Geraden sind

$$\frac{\xi - x}{|\varrho|}, \quad \frac{\eta - y}{|\varrho|}, \quad \frac{\zeta - z}{|\varrho|}.$$

Stimmen diese mit X, Y, Z überein, so ist der Festsetzung nach ϱ positiv, also $|\varrho| = \varrho$, und

$$\frac{\xi - x}{\varrho} = X, \text{ etc.}$$

Sind dagegen jene Richtungscosinus gleich $-X$, $-Y$, $-Z$, so soll ϱ negativ sein, es ist $|\varrho| = -\varrho$, und

$$\frac{\xi - x}{-\varrho} = -X, \text{ etc.}$$

Diese Gleichungen sind mit (7) identisch, wenn stets

$$\varepsilon = +1$$

genommen wird. Hiermit ist gezeigt, dass die jetzt gemachte geometrische Zeichenbestimmung mit der bereits im § 9 getroffenen analytischen völlig übereinstimmt.

Aus § 9 (9) und der Gleichung (6) oder

(8) $$dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ = -(L du^2 + 2M du\,dv + N dv^2)$$

folgt noch für den Krümmungsradius der Ausdruck

(9) $$\varrho = -\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ}.$$

§ 11.

Will man den Ausdruck $dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ$ durch directe Berechnung finden, so bietet sich die Aufgabe dar, die in den Differentialen dX, dY, dZ auftretenden Ableitungen $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$ ... zu bilden. Es ist zweckmässig, hierzu die Gleichungen

(1) $$X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

(2) $$X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

(3) $$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

zu benutzen, welche in Verbindung mit der im § 8 ausgeführten Zeichenbestimmung als Definitionsformeln für X, Y, Z dienen können. Denn eine Differentiation der ausgerechneten Werte § 8 (7) würde zu unübersichtlichen Rechnungen führen.

Differentiirt man die Gleichungen (1, 2, 3) nach u und v und beachtet die Definitionen der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung [§ 9 (6)], so folgt

(4) $$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} = -L \\ \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = -M, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=-M \\ \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}=-N, \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u}X+\frac{\partial Y}{\partial u}Y+\frac{\partial Z}{\partial u}Z=0 \\ \frac{\partial X}{\partial v}X+\frac{\partial Y}{\partial v}Y+\frac{\partial Z}{\partial v}Z=0. \end{cases}$$

Bei der Auflösung der ersten Gleichungen dieser drei Paare nach $\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial u}$ steht im Nenner die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \sqrt{EG-F^2}\,(X^2+Y^2+Z^2) = \sqrt{EG-F^2},$$

und in den Zähler von $\frac{\partial X}{\partial u}$ tritt

$$\begin{vmatrix} -L & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ -M & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ 0 & Y & Z \end{vmatrix} = L\left(Y\frac{\partial z}{\partial v}-Z\frac{\partial y}{\partial v}\right)-M\left(Y\frac{\partial z}{\partial u}-Z\frac{\partial y}{\partial u}\right).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &Y\frac{\partial z}{\partial u}-Z\frac{\partial y}{\partial u} \\ &=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u}-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right\} \\ &=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{-\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right. \\ &\qquad\left.+\frac{\partial x}{\partial v}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right)\right\} \end{aligned}$$

oder

$$(7)\qquad Y\frac{\partial z}{\partial u}-Z\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(-F\frac{\partial x}{\partial u}+E\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$(8)\qquad Y\frac{\partial z}{\partial v}-Z\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(-G\frac{\partial x}{\partial u}+F\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

mithin wird

$$\frac{\partial X}{\partial u}=\frac{1}{EG-F^2}\left\{(FM-GL)\frac{\partial x}{\partial u}+(FL-EM)\frac{\partial x}{\partial v}\right\}.$$

Das System der zur Berechnung verwendeten Gleichungen bleibt ungeändert, wenn man x, y, z und damit auch X, Y, Z cyklisch permu-

tirt. Macht man diese Permutationen auch in der eben abgeleiteten Gleichung, so ergeben sich links $\frac{\partial Y}{\partial u}$, $\frac{\partial Z}{\partial u}$; rechts stehen homogene lineare Functionen von $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ resp. $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, deren Coefficienten, als nur von den Fundamentalgrössen abhängig, dieselben sind wie vorher.

Vertauscht man in der ganzen Rechnung u mit v, d. h. verwendet man die zweiten Gleichungen der Systeme (4, 5, 6), so treten M und N an die Stelle von L und M, $\frac{\partial X}{\partial v}$ etc. an die Stelle von $\frac{\partial X}{\partial u}$ etc. Im Uebrigen ändert sich die Rechnung nicht, und man erhält

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{1}{EG - F^2}\left\{(FN - GM)\frac{\partial x}{\partial u} + (FM - EN)\frac{\partial x}{\partial v}\right\} \text{ etc.}$$

Diese Gleichungen werden häufig auch in der nach $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ etc. aufgelösten Form gebraucht. Die Auflösungsdeterminante ist

$$\frac{1}{(EG - F^2)^2}\begin{vmatrix} FM - GL, & FL - EM \\ FN - GM, & FM - EN \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(EG - F^2)^2}\begin{vmatrix} F, & -G \\ -E, & F \end{vmatrix}\begin{vmatrix} M, & L \\ N, & M \end{vmatrix} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

und es wird

$$(LN - M^2)\frac{\partial x}{\partial u} = (FM - EN)\frac{\partial X}{\partial u} + (EM - FL)\frac{\partial X}{\partial v}$$

$$(LN - M^2)\frac{\partial x}{\partial v} = (GM - FN)\frac{\partial X}{\partial u} + (FM - GL)\frac{\partial X}{\partial v}.$$

Es sei jetzt bleibend gesetzt

$$(9) \qquad \begin{cases} FM - GL = \eta, & FL - EM = \vartheta \\ FN - GM = \eta', & FM - EN = \vartheta', \end{cases}$$

so erhält man definitiv:

$$(10) \qquad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{EG - F^2}\left(\eta\frac{\partial x}{\partial u} + \vartheta\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{1}{EG - F^2}\left(\eta'\frac{\partial x}{\partial u} + \vartheta'\frac{\partial x}{\partial v}\right), \end{cases}$$

$$(11) \qquad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{LN - M^2}\left(\vartheta'\frac{\partial X}{\partial u} - \vartheta\frac{\partial X}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{LN - M^2}\left(-\eta'\frac{\partial X}{\partial u} + \eta\frac{\partial X}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Die Gleichungen (10, 11) finden in der gesammten Flächentheorie vielfache Anwendung.

Die Grössen $\eta \ldots \vartheta'$ genügen folgenden zwei Gleichungssystemen, deren jedes zu ihrer vollständigen Definition ausreicht:

$$(12)\qquad \begin{cases} E\eta + F\vartheta = -L(EG - F^2) \\ F\eta + G\vartheta = E\eta' + F\vartheta' = -M(EG - F^2) \\ F\eta' + G\vartheta' = -N(EG - F^2), \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} L\vartheta' - M\vartheta = -E(LN - M^2) \\ M\vartheta' - N\vartheta = -L\eta' + M\eta = -F(LN - M^2) \\ -M\eta' + N\eta = -G(LN - M^2). \end{cases}$$

Aus den Formeln (10) und (12) würde sich wiederum leicht der Ausdruck

$$J = dxdX + dydY + dzdZ$$

ergeben. Doch ist es wegen der Symmetrie dieses Wertes nur nötig, auf die Gleichungen (4, 5) zu recurriren. Im Folgenden sei, falls $H(x, y, z)$ irgend einen von x, y, z abhängigen Ausdruck bezeichnet, unter $\sum H(x, y, z)$ die Summe

$$H(x, y, z) + H(y, z, x) + H(z, x, y)$$

verstanden, welche bei einer cyklischen Permutation der Cartesischen Coordinaten ungeändert bleibt. Dann ist

$$J = \sum dxdX = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv\right)$$
$$= \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}du^2 + \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right)dudv + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}dv^2,$$

und die Gleichungen (4, 5) können geschrieben werden:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = -L, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = -N,$$
$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = -M.$$

Daher ist der gesuchte Wert:

$$J = -(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2),$$

wie bereits im vorigen Paragraphen gefunden.

§ 12.

Im § 9 ist bewiesen worden, dass von allen, durch eine bestimmte Tangente hindurchgehenden ebenen Schnitten einer Fläche der Normalschnitt die kleinste Krümmung hat. Man kann nun weiter nach denjenigen Normalschnitten fragen, für welche unter allen, durch einen und denselben Flächenpunkt gelegten die Krümmung ein Minimum (oder Maximum) ist. Bei dieser Untersuchung hat man $\frac{1}{\varrho}$ oder ϱ als Function von

$$\frac{dv}{du} = \lambda$$

zu betrachten, also zu setzen [§ 9 (9)]

$$\varrho = \frac{E + 2F\lambda + G\lambda^2}{L + 2M\lambda + N\lambda^2}. \tag{1}$$

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Maximums oder Minimums von ϱ wird gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \lambda} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\frac{(L + 2M\lambda + N\lambda^2)(F + G\lambda) - (E + 2F\lambda + G\lambda^2)(M + N\lambda)}{(L + 2M\lambda + N\lambda^2)^2} = 0.$$

Die linke Seite verschwindet, wenn entweder der Zähler Null oder der Nenner unendlich gross wird. Da L, M, N für das betrachtete Flächenstück endliche Werte haben (nach p. 22), so kann die zweite Alternative nur dadurch eintreten, dass λ unendlich gross wird. Diese Annahme, welche mit $du = 0$ äquivalent ist, führt auf den Krümmungsradius der Linie $u = \text{const.}$, welcher offenbar nicht bei einer beliebigen Wahl der Coordinatenlinien ein Maximum oder Minimum sein kann. Wir setzen daher den Zähler gleich Null und erhalten

$$\frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{M + N\lambda} = \frac{E + 2F\lambda + G\lambda^2}{F + G\lambda} \tag{2}$$

oder, diese Proportion durch Subtraction von λ auf beiden Seiten verändert,

$$\frac{L + M\lambda}{M + N\lambda} = \frac{E + F\lambda}{F + G\lambda}, \tag{3}$$

$$(EM - FL) + (EN - GL)\lambda + (FN - GM)\lambda^2 = 0. \tag{4}$$

Die beiden durch die Wurzeln λ_1, λ_2 dieser quadratischen Gleichung bestimmten Tangenten der Fläche in dem gegebenen Punkte heissen die Haupttangenten, die durch sie hindurchgehenden Normalebenen die Hauptnormalebenen, die zugehörigen Schnitte die Hauptnormalschnitte oder Hauptschnitte.

Aus (1) und (2) folgt für den Krümmungsradius eines Hauptschnitts:

$$\varrho_k = \frac{F + G\lambda_k}{M + N\lambda_k}, \qquad (k = 1, 2) \tag{5}$$

und mit Hinzunahme von (3):

$$\varrho_k = \frac{E + F\lambda_k}{L + M\lambda_k}. \tag{6}$$

Schreibt man diese Gleichungen in der Form

(7) $$\lambda_k = -\frac{E - L\varrho_k}{F - M\varrho_k}, \qquad \lambda_k = -\frac{F - M\varrho_k}{G - N\varrho_k}$$

und eliminirt aus ihnen λ_k, so ergibt sich für ϱ_1, ϱ_2 die quadratische Gleichung

(8) $$(E - L\varrho)(G - N\varrho) = (F - M\varrho)^2$$

oder

(9) $$(LN - M^2)\varrho^2 - (GL - 2FM + EN)\varrho + EG - F^2 = 0.$$

Die beiden Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 dieser Gleichung heissen die Hauptkrümmungsradien der Fläche in dem gegebenen Punkte.

Führt man in die Gleichungen (4) und (9) die Grössen $\eta \ldots \vartheta'$ ein [§ 11 (9)], so erhält man

(10) $$-\vartheta - (\vartheta' - \eta)\lambda + \eta'\lambda^2 = 0$$

(11) $$(\eta\vartheta' - \vartheta\eta')\varrho^2 + (\eta + \vartheta')(EG - F^2)\varrho + (EG - F^2)^2 = 0,$$

und aus (9, 11) ergibt sich, wenn

(12) $$\frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} = -\frac{\eta + \vartheta'}{EG - F^2} = H$$

(13) $$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\eta\vartheta' - \vartheta\eta'}{(EG - F^2)^2} = K$$

gesetzt wird,

(14) $$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = H, \qquad \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = K.$$

Um die Hauptnormalebenen und Hauptkrümmungsradien hinsichtlich ihrer Realität zu untersuchen, bilden wir die gemeinsame Discriminante der in (4) und (9) auftretenden ganzen Functionen zweiten Grades, welche in der Form

(15) $$D = -\frac{1}{4}[4\vartheta\eta' + (\vartheta' - \eta)^2] = -\frac{1}{4}(EG - F^2)^2(H^2 - 4K)$$

geschrieben werden kann. Nun ist

$$\vartheta = FL - EM$$
$$\vartheta' - \eta = GL - EN,$$

mithin

$$\eta' = FN - GM = \frac{1}{E}[G\vartheta - F(\vartheta' - \eta)],$$

und weiter

$$D = -\frac{1}{4E^2}[4\vartheta^2 EG - 4EF\vartheta(\vartheta' - \eta) + E^2(\vartheta' - \eta)^2]$$

(16) $$D = -\frac{1}{4E^2}[4\vartheta^2(EG - F^2) + (2F\vartheta - E(\vartheta' - \eta))^2].$$

Da nun E und $EG - F^2$ positiv sind, so ist D beständig negativ, λ_1, λ_2, ϱ_1, ϱ_2 reell. Also:

Unter den für die Functionen x, y, z, sowie für die Variablen u, v gemachten Annahmen sind die Hauptnormalebenen und die Hauptkrümmungsradien stets reell.

Berechnet man nach § 6 den Winkel der beiden Ebenen, indem man

$$a_{11} = -\vartheta, \quad a_{12} = -\frac{1}{2}(\vartheta' - \eta), \quad a_{22} = \eta' \tag{17}$$

setzt, so findet sich

$$-G\vartheta + F(\vartheta' - \eta) + E\eta' = 0, \tag{18}$$

d. h. [§ 6 (11)] die Hauptnormalebenen schneiden sich unter rechten Winkeln.

Ist gleichzeitig

$$EM - FL = 0$$
$$EN - GL = 0$$
$$FN - GM = 0,$$

oder

$$\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}, \tag{19}$$

so wird die Bestimmung der Hauptnormalebenen unmöglich, da (4) identisch erfüllt ist. Dies kann nur für besondere Punkte eintreten, welche durch Combination der Gleichungen (19) mit den Flächengleichungen erhalten werden. Sie heissen Nabelpunkte, Kreispunkte oder Punkte sphärischer Krümmung. Sind auch die Bestimmungsgleichungen dieser Punkte noch von einander abhängig, so erhält man im Allgemeinen auf der Fläche eine Curve von Kreispunkten, welche als Linie sphärischer Krümmung bezeichnet wird. — Aus (19) und (1) ergibt sich sofort

$$\varrho = \frac{E}{L},$$

d. h. in einem Kreispunkt hat der Krümmungsradius für jeden Normalschnitt denselben Wert, speciell sind auch die beiden Hauptkrümmungshalbmesser einander gleich. Umgekehrt führt die Aufstellung der letzteren Bedingung wieder auf die Nabelpunkte. Denn es folgt aus dem vorher aufgestellten Ausdruck für die Discriminante D der Gleichung (9), dass für reelle Grössen $E, F, \ldots$ nur dann $D = 0$ sein kann, wenn ϑ und $\vartheta' - \eta$ verschwinden, d. h. die Gleichungen (19) bestehen.

§ 13.

Es bleibt hinsichtlich der beiden im § 12 gefundenen Hauptkrümmungsradien noch zu untersuchen, ob sie den Bedingungen des Maximums resp. Minimums genügen. Zunächst werde der Ausdruck für ϱ noch in eine andere Form gesetzt. Man kann zur Bestimmung eines

beliebigen Normalschnitts offenbar den Winkel verwenden, welchen seine Ebene mit einer der beiden Hauptnormalebenen bildet; die Functionen dieses Winkels sollen in die Gleichung für ϱ eingeführt werden. Es sei ψ der Winkel des gegebenen Normalschnitts mit der, durch die Grösse λ_1 bestimmten Hauptebene. Dann ist nach § 4 (6) für $\frac{dv}{du} = \lambda$, $\frac{\delta v}{\delta u} = \lambda_1$:

$$(1) \qquad \cos^2\psi = \frac{[E + F(\lambda + \lambda_1) + G\lambda\lambda_1]^2}{(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(E + 2F\lambda_1 + G\lambda_1^2)}.$$

Hieraus könnte λ entnommen und in § 13 (1) substituirt werden; doch empfiehlt es sich, um die Symmetrie der Rechnung zu wahren, auch den Winkel ψ' in Betracht zu ziehen, welchen der Normalschnitt mit der zweiten Hauptebene bildet. Wegen der Orthogonalität der beiden Hauptebenen ist

$$\psi' = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right),$$

also jedenfalls

$$(2) \qquad \sin^2\psi = \cos^2\psi' = \frac{[E + F(\lambda + \lambda_2) + G\lambda\lambda_2]^2}{(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(E + 2F\lambda_2 + G\lambda_2^2)}.$$

Mit Benutzung der Identität (§ 12)

$$E + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G\lambda_1\lambda_2 = 0$$

folgt sofort

$$E + F(\lambda + \lambda_1) + G\lambda\lambda_1 = (F + G\lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

$$E + 2F\lambda_1 + G\lambda_1^2 = (F + G\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2), \text{ etc.}$$

mithin

$$\cos^2\psi = \frac{(F + G\lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2}{(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$\sin^2\psi = \frac{(F + G\lambda_2)(\lambda - \lambda_1)^2}{(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Werden λ_1 und λ_2 vertauscht, so gehen diese Ausdrücke in einander über. Macht man daher mit ihnen eine symmetrische Combination, so erhält man eine symmetrische Function von λ_1 und λ_2, welche sich durch die Coefficienten der Gleichung § 12 (4) ausdrücken lässt und ausserdem λ enthält. Aus der entstehenden Gleichung in Verbindung mit § 12 (1) ist dann noch λ zu eliminiren, um ϱ als Function von ψ zu erhalten. Nun gibt die Addition der beiden letzten Gleichungen nur die Identität $\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1$; führt man dagegen die Hauptkrümmungsradien durch die Gleichungen [§ 12 (5)]

$$\varrho_k = \frac{F + G\lambda_k}{M + N\lambda_k} \qquad (k = 1, 2)$$

ein, dividirt durch ϱ_1 resp. ϱ_2 und addirt dann, so folgt

$$\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\psi}{\varrho_2}=\frac{(M+N\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)^2-(M+N\lambda_2)(\lambda-\lambda_1)^2}{(E+2F\lambda+G\lambda^2)(\lambda_1-\lambda_2)}$$
$$=\frac{2M\lambda+N\lambda^2-M(\lambda_1+\lambda_2)-N\lambda_1\lambda_2}{E+2F\lambda+G\lambda^2}.$$

Nun ist

$$L+M(\lambda_1+\lambda_2)+N\lambda_1\lambda_2=\frac{1}{\eta'}[L\eta'+M(\vartheta'-\eta)-N\vartheta]$$
$$=\frac{1}{\eta'}\begin{vmatrix} L & M & N \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0,$$

also

$$\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\psi}{\varrho_2}=\frac{L+2M\lambda+N\lambda^2}{E+2F\lambda+G\lambda^2},$$

und nach Elimination von λ

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\psi}{\varrho_2}. \tag{3}$$

Der Inhalt dieser Gleichung, welche den Zusammenhang der Hauptkrümmungen mit der Krümmung eines beliebigen Normalschnitts liefert, wird als der Euler'sche Satz bezeichnet. Er gibt zu einer grossen Anzahl von Folgerungen Veranlassung.

Schreibt man die Gleichung (3) in der Form

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}+\sin^2\psi\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho_1}\right), \tag{4}$$

und betrachtet ψ als einen spitzen Winkel (was gestattet ist), nimmt ferner

$$\frac{1}{\varrho_2}>\frac{1}{\varrho_1}$$

an, so wird die rechte Seite von (4) ein Maximum für $\psi=\frac{\pi}{2}$, ein Minimum für $\psi=0$. Im ersten Fall wird $\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_2}$, im zweiten $\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}$. Demnach haben in der That ϱ_1 und ϱ_2 die im Anfange des § 12 geforderte Maximal- resp. Minimal-Eigenschaft.

§ 14.

Um weitere Consequenzen aus dem Euler'schen Satze

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\psi}{\varrho_2} \tag{1}$$

abzuleiten, nehmen wir einen zweiten Normalschnitt an, dessen Krümmungsradius ϱ' ist und welcher den Winkel χ mit der ersten Hauptebene bildet. Dann ist auch

$$\frac{1}{\varrho'}=\frac{\cos^2\chi}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\chi}{\varrho_2}. \tag{2}$$

Die beiden Normalschnitte mögen nun erstens auf einander senkrecht sein. Dann kann gesetzt werden

$$\chi = \frac{\pi}{2} + \psi,$$

also

$$\cos^2\chi = \sin^2\psi, \qquad \sin^2\chi = \cos^2\psi,$$

und die Addition von (1) und (2) ergibt

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}, \tag{3}$$

die Summe der Krümmungen zweier orthogonalen Normalschnitte ist constant und gleich der Summe der Hauptkrümmungen.

Derselbe Satz gilt für zwei Normalschnitte, welche die Winkel ψ und $\frac{\pi}{2} - \psi$ mit einem Hauptschnitt bilden. Drittens seien die beiden Schnitte gegen den Hauptnormalschnitt gleich geneigt, sodass

$$\chi = \pi - \psi \quad \text{oder auch} \quad \chi = -\psi,$$
$$\cos^2\chi = \cos^2\psi, \qquad \sin^2\chi = \sin^2\psi$$

gesetzt werden kann; es folgt dann

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho'},$$

d. h. zwei Normalschnitte, welche entgegengesetzt-gleiche Winkel mit einem Hauptschnitt bilden, haben dieselbe Krümmung.

Von Sätzen dieser Art kann eine ganze Anzahl sofort hingeschrieben werden, wenn man den Euler'schen Satz mit der Theorie der Kegelschnitte in Beziehung setzt, eine Beziehung, deren innerer Grund sich im § 20 herausstellen wird. Es seien zunächst ϱ_1 und ϱ_2 von demselben Vorzeichen. Dasselbe kann als positiv angenommen werden, weil es anderenfalls genügte, die Gleichung (1) mit -1 zu multipliciren und $-\varrho$ für ϱ zu setzen. Als Summe positiver Grössen ist auch $\frac{1}{\varrho}$ positiv. Es sei nun der gegebene Flächenpunkt Anfangspunkt eines Coordinatensystems in der Tangentialebene, dessen Axen mit den Haupttangenten zusammenfallen. Auf dieses System sei die Ellipse

$$\frac{\xi^2}{\varrho_1} + \frac{\eta^2}{\varrho_2} = 1$$

bezogen. Geht man zu einem System von Polarcoordinaten mit dem Radiusvector R und dem Richtungswinkel ψ über, so wird

$$\frac{R^2\cos^2\psi}{\varrho_1} + \frac{R^2\sin^2\psi}{\varrho_2} = 1,$$

also in Verbindung mit (1):

$$R^2 = \varrho .$$

Dies gibt folgenden Ausspruch des Euler'schen Satzes: Construirt man, unter der Annahme, dass die Hauptkrümmungsradien positiv sind, in der Tangentialebene eine Ellipse, für welche die Hauptaxenrichtungen mit den Haupttangenten, die Quadrate der Halbaxen mit den Hauptkrümmungsradien übereinstimmen, so ist der Krümmungsradius irgend eines Normalschnitts gleich dem Quadrate desjenigen Halbdurchmessers der Ellipse, welcher durch die, dem Normalschnitt zugehörige Tangente der Fläche bestimmt wird.

Zweitens seien ϱ_1 und ϱ_2 von verschiedenem Zeichen, und

$$\varrho_2 > 0, \qquad \varrho_1 = -\varrho_1' < 0.$$

ϱ kann positiv oder negativ werden. Im ersten Fall ist dann ϱ gleich dem Quadrat eines (analog wie vorher zu bestimmenden) Halbdurchmessers der Hyperbel

$$-\frac{\xi^2}{\varrho_1'} + \frac{\eta^2}{\varrho_2} = 1.$$

Im zweiten Fall wird die Bestimmung des absoluten Betrages von ϱ in derselben Art durch die conjugirte Hyperbel

$$\frac{\xi^2}{\varrho_1'} - \frac{\eta^2}{\varrho_2} = 1$$

geleistet.

Die beiden Richtungen auf der Fläche, welche den gemeinsamen Asymptoten beider Hyperbeln entsprechen und durch die Gleichung

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tg}\psi = \pm\sqrt{-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$$

bestimmt werden, heissen die asymptotischen Richtungen. Für sie ist $\frac{1}{\varrho} = 0$, oder der Krümmungsradius des Normalschnitts unendlich gross. Da ein Punkt einer ebenen Curve, in welchem die Krümmung Null wird, im Allgemeinen ein Wendepunkt ist, so werden die entsprechenden Tangenten als Wende- oder Inflexionstangenten bezeichnet. Nach § 9 (9) ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}$$

zu setzen; die Inflexionstangenten können daher auch durch die Gleichung

$$\text{(5)} \qquad L + 2M\lambda + N\lambda^2 = 0$$

bestimmt werden. Derselbe Ausdruck von $\frac{1}{\varrho}$ lehrt, dass ein Ver-

schwinden von ϱ im Inneren solcher Flächenstücke, wie wir sie hier betrachten, nicht stattfinden kann.

Eine besondere Erwähnung verdient noch der Fall

$$L = M = N = 0.$$

Doch wollen wir die entsprechende Discussion bis zum § 17 verschieben.

§ 15.

Zwischen den Grössen η, ϑ, η', ϑ' und den im § 12 definirten H und K (der Summe und dem Product der Hauptkrümmungen) besteht eine Anzahl häufig gebrauchter Relationen, welche wir hier zusammenstellen wollen. Bereits in den Paragraphen 12 und 13 sind die Formeln

$$(1) \qquad -G\vartheta + F(\vartheta' - \eta) + E\eta' = 0$$

$$(2) \qquad -N\vartheta + M(\vartheta' - \eta) + L\eta' = 0$$

gegeben worden. Die erste besagte, dass die beiden Hauptnormalebenen auf einander senkrecht stehen; die Bedeutung der zweiten wird sich im § 22 herausstellen.

Ersetzt man ferner in den Gleichungen § 11 (12, 13) $EG - F^2$ durch T^2, $LN - M^2$ durch KT^2, so gehen sie über in:

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} E\eta + F\vartheta = -LT^2 \\ F\eta + G\vartheta \\ E\eta' + F\vartheta' \end{array}\right\} = -MT^2$$
$$F\eta' + G\vartheta' = -NT^2,$$

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} L\vartheta' - M\vartheta = -EKT^2 \\ M\vartheta' - N\vartheta \\ -L\eta' + M\eta \end{array}\right\} = -FKT^2$$
$$-M\eta' + N\eta = -GKT^2.$$

Die Formeln

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} \eta + \vartheta' = -T^2 H \\ \eta\vartheta' - \vartheta\eta' = T^4 K \end{array}\right.$$

wurden im § 12 gegeben. Weitere Relationen sind:

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} E\vartheta' - F\vartheta = T^2(-HE + L) \\ F\vartheta' - G\vartheta \\ -E\eta' + F\eta \end{array}\right\} = T^2(-HF + M)$$
$$-F\eta' + G\eta = T^2(-HG + N).$$

$$(7)\quad \begin{cases} L\eta + M\vartheta = T^2(KE - HL) \\ \left.\begin{matrix} M\eta + N\vartheta \\ L\eta' + M\vartheta' \end{matrix}\right\} = T^2(KF - HM) \\ M\eta' + N\vartheta' = T^2(KG - HN); \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} 2F\vartheta - E(\vartheta' - \eta) = T^2(HE - 2L) \\ \left.\begin{matrix} 2G\vartheta - F(\vartheta' - \eta) \\ E\eta' + G\vartheta \\ 2E\eta' + F(\vartheta' - \eta) \end{matrix}\right\} = T^2(HF - 2M) \\ 2F\eta' + G(\vartheta' - \eta) = T^2(HG - 2N), \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} 2M\vartheta - L(\vartheta' - \eta) = T^2(-HL + 2KE) \\ \left.\begin{matrix} 2N\vartheta - M(\vartheta' - \eta) \\ L\eta' + N\vartheta \\ 2L\eta' + M(\vartheta' - \eta) \end{matrix}\right\} = T^2(-HM + 2KF) \\ 2M\eta' + N(\vartheta' - \eta) = T^2(-HN + 2KG). \end{cases}$$

Der Ausdruck der quadratischen Differentialform, deren Coefficienten $-\vartheta$, $-\frac{1}{2}(\vartheta' - \eta)$, η' sind, wird im § 26 gegeben werden.

§ 16.

Es sollen jetzt die Formeln der Paragraphen 9 bis 12 für die Annahme aufgestellt werden, dass die Fläche durch eine Gleichung zwischen Cartesischen Coordinaten gegeben ist, und zwar nehmen wir zuerst die Darstellung $z = \varphi(x, y)$ (cf. § 1). Ihre Anwendung empfiehlt sich besonders in der Theorie partieller Differentialgleichungen, auf welche man durch flächentheoretische Untersuchungen geführt wird.

Wir brauchen vor allem die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung. Zunächst ist für $u = x$, $v = y$ [cf. § 7 (2)]

$$(1)\quad E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Setzt man ferner nach Euler

$$(2)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

und berücksichtigt [§ 8 (5)]:

$$X = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad Y = -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

so folgt [§ 9 (6)]:

$$(3)\quad \begin{cases} L = \dfrac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad M = \dfrac{s}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad N = \dfrac{t}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \\ LN - M^2 = \dfrac{rt-s^2}{p^2+q^2+1}. \end{cases}$$

Der Ausdruck für den Krümmungsradius eines Normalschnitts wird [§ 9 (9)]

$$(4)\quad \varrho = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}\cdot ds^2}{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2} = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

wenn $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$ gesetzt wird (cf. § 4), und die Coordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes sind bestimmt durch [§ 10 (7)]

$$(5)\quad \begin{cases} \xi - x = \dfrac{-p\varrho}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \eta - y = \dfrac{-q\varrho}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \\ \zeta - z = \dfrac{\varrho}{\sqrt{p^2+q^2+1}}. \end{cases}$$

Die Relationen § 11 (10) liefern:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = \dfrac{pqs - (1+q^2)r}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}, & \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{pqt - (1+q^2)s}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{pqr - (1+p^2)s}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}, & \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \dfrac{pqs - (1+p^2)t}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial x} = -\dfrac{pr+qs}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}, & \dfrac{\partial Z}{\partial y} = -\dfrac{ps+qt}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen für die Hauptnormalebenen und die Hauptkrümmungsradien [§ 12 (4, 9)] gehen über in

$$(7)\quad [(1+p^2)s - pqr] + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\lambda + [pqt - (1+q^2)s]\lambda^2 = 0,$$

$$(8)\quad (rt-s^2)\varrho^2 - [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\sqrt{p^2+q^2+1}\cdot\varrho + (p^2+q^2+1)^2 = 0,$$

und die gegenseitige Beziehung ihrer Wurzeln wird vermittelt durch [§ 12 (6, 5)]

$$(9)\quad \varrho_k = \frac{1+p^2+pq\lambda_k}{r+s\lambda_k}\sqrt{p^2+q^2+1} = \frac{pq+(1+q^2)\lambda_k}{s+t\lambda_k}\sqrt{p^2+q^2+1} \quad (k=1,2).$$

Endlich werden die Kreispunkte durch die Gleichungen [§ 12 (19)]

$$(10)\quad \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}$$

gegeben.

Die beiden Hauptergebnisse der §§ 12 und 13 lassen sich in sehr einfacher Weise ableiten, wenn man das Cartesische Coordinaten-

system passend wählt. Es sei der gegebene Flächenpunkt A Anfangspunkt der Coordinaten, sodass für ihn

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0$$

ist; ferner sei die Tangentialebene die (xy)-Ebene, die nach aussen gehende Normale die positive z-Axe des Coordinatensystems. Diese Annahmen empfehlen sich immer dann, wenn es sich um die Untersuchung einer Fläche in einem einzelnen Punkte handelt. Da sie offenbar stets möglich sind, so müssen die Coefficienten in der Gleichung der Tangentialebene

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

sich so bestimmen lassen, dass diese Gleichung mit

$$\zeta = 0$$

identisch wird. Dies gibt

$$p = 0, \qquad q = 0$$

für den Punkt A, und die Gleichung (7) wird

$$s\lambda^2 + (r - t)\lambda - s = 0. \tag{11}$$

Die beiden Wurzeln $\lambda = \frac{dy}{dx}$ von (11) sind die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die beiden Hauptnormalebenen mit der (xz)-Ebene bilden. Da nun aus (11) folgt:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \operatorname{tg} w_1 \operatorname{tg} w_2 = -1,$$

so findet man weiter

$$\cos(w_1 - w_2) = 0,$$

d. h. die Orthogonalität der beiden Hauptebenen.

Setzt man jetzt ferner fest, dass die x- und die y-Axe mit den beiden Haupttangenten zusammenfallen sollen, so ist auch diese Forderung immer zu erfüllen. Eine Wurzel von (11) muss dann Null, die andere unendlich gross werden; das Bestehen der Gleichung

$$s = 0$$

für den Punkt A ist die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür. Substituirt man $p = 0$, $q = 0$, $s = 0$ in (8) und (4), so folgt

$$rt\varrho^2 - (r + t)\varrho + 1 = 0 \tag{12}$$

oder

$$\varrho_1 = \frac{1}{r}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{t}, \tag{13}$$

ferner

$$\varrho = \frac{1 + \lambda^2}{r + t\lambda^2} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{r + t \operatorname{tg}^2 \psi},$$

und nach Elimination von r und t:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\psi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2},$$

d. h. wiederum der Euler'sche Satz.

§ 17.

Wir erörtern noch den im § 14 unerledigt gebliebenen Fall, dass die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung für einen gegebenen Punkt oder für einen gewissen Bezirk alle drei gleich Null sind. Aus den Gleichungen des § 12 geht hervor, dass man es alsdann mit Kreispunkten von besonderer Art zu thun hat. Wir setzen jetzt $u = x$, $v = y$ und nehmen an, dass die aus § 16 (3) folgenden Gleichungen

$$r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0$$

für alle Wertepaare (xy) innerhalb eines gewissen Bereiches gelten. Die Integration der drei partiellen Differentialgleichungen liefert

$$\begin{aligned} z &= x\psi_1(y) + \psi_2(y) \\ z &= \chi_1(x) \quad + \chi_2(y) \\ z &= y\varpi_1(x) + \varpi_2(x), \end{aligned}$$

und eine leichte Ueberlegung zeigt, dass diese Gleichungen nur dann gleichzeitig bestehen können, wenn

$$z = Ax + By + C$$

gesetzt wird, für A, B, C als willkürliche Constanten. Das betrachtete Flächenstück gehört also einer Ebene an.

Die Formeln des vorigen Paragraphen gestatten auch, in einfacher Weise eine Untersuchung durchzuführen, welche als eine Erweiterung der eben angestellten betrachtet werden kann. Es seien alle Punkte eines Flächenstücks Kreispunkte, sodass bei Einführung Cartesischer Coordinaten die Gleichungen § 16 (10) gelten. Verbindet man sie mit den Formeln (6), so ergibt sich

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Hieraus folgt $X = \psi(x)$, $Y = \chi(y)$, mit der Bedingung

$$\psi'(x) = \chi'(y),$$

welche nur erfüllt wird, wenn beide Seiten der Gleichung einer und derselben Constanten $\frac{1}{R}$ gleich sind. Es ergibt sich also

$$X = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}} = \frac{x-A}{R},$$
$$Y = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}} = \frac{y-B}{R},$$

wo A und B zwei neue willkürliche Constanten bezeichnen, und durch Auflösung nach p und q:

$$p = \pm \frac{x-A}{\sqrt{R^2-(x-A)^2-(y-B)^2}}$$
$$q = \pm \frac{y-B}{\sqrt{R^2-(x-A)^2-(y-B)^2}}.$$

Bei nochmaliger Integration erhält man endlich

$$z = \pm \sqrt{R^2-(x-A)^2-(y-B)^2} + C$$

oder

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2 = R^2,$$

d. h. ein Flächenstück, dessen Punkte sämmtlich sphärische Krümmung haben, ist Teil einer Kugelfläche.

§ 18.

Ist z als implicite Function von x und y durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben, so ist es nötig, p, q, r, s, t durch die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von F auszudrücken, welche sämmtlich als eindeutig, endlich und stetig vorausgesetzt werden. Es seien die Bezeichnungen eingeführt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = F_3$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F_{11}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = F_{22}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = F_{33}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = F_{23}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = F_{31}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F_{12}.$$

Aus den Gleichungen

$$F_1 + pF_3 = 0, \qquad F_2 + qF_3 = 0$$

folgt durch Differentiation, wobei z als abhängige Variable zu betrachten ist,

$$F_{11} + F_{13}p + p(F_{31} + F_{33}p) + F_3 r = 0 \text{ etc.},$$

und nach Elimination von p und q:

$$F_3^3 r = -(F_{11}F_3^2 - 2F_{13}F_1F_3 + F_{33}F_1^2)$$
$$F_3^3 s = F_{13}F_2F_3 + F_{23}F_1F_3 - F_{12}F_3^2 - F_{33}F_1F_2$$
$$F_3^3 t = -(F_{22}F_3^2 - 2F_{23}F_2F_3 + F_{33}F_2^2).$$

Zu den Coefficienten der Gleichungen (4) und (9) (§ 12) führt eine leichte Rechnung, deren Resultate hier nur angegeben werden sollen, insofern sie sich auf (9) beziehen; die Gleichung (4) wird später (§ 41) transformirt werden, wenn sich eine neue Bedeutung für sie herausgestellt haben wird. Es sei gesetzt:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix} = \bar{K},$$

$$(2)\qquad -F_{11}(F_2^2+F_3^2)-F_{22}(F_3^2+F_1^2)-F_{33}(F_1^2+F_2^2) + 2F_{23}F_2F_3+2F_{31}F_3F_1+2F_{12}F_1F_2=\bar{H},$$

dann wird

$$(3)\qquad F_3^3[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]=\bar{H},$$

$$(4)\qquad F_3^4(rt-s^2)=-\bar{K}.$$

Bei der Bestimmung von

$$\sqrt{p^2+q^2+1}=\frac{\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2}}{\pm F_3}$$

ist das Zeichen so zu wählen, dass die entstehende Gleichung, mit F_3^4 multiplicirt, für

$$F(x,\ y,\ z)=z-\varphi(x,\ y)$$

in die ursprüngliche übergeht. Dies geschieht, wenn man setzt:

$$(5)\qquad -\bar{K}\varrho^2-\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2}\,\bar{H}\varrho+(F_1^2+F_2^2+F_3^2)^2=0.$$

Führt man noch eine Hilfsgrösse ϱ' ein durch die Substitution

$$(6)\qquad \varrho=-\frac{\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2}}{\varrho'},$$

so lässt sich die Bestimmungsgleichung für ϱ'

$$(7)\qquad (F_1^2+F_2^2+F_3^2)\varrho'^2+\bar{H}\varrho'-\bar{K}=0$$

in Determinantenform schreiben. Es wird nämlich

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} F_{11}-\varrho' & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22}-\varrho' & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33}-\varrho' & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

diejenige Gleichung, welche zusammen mit (6) die Hauptkrümmungsradien der Fläche $F=0$ liefert.

Sie lässt eine interessante Transformation zu, wenn man für die zweiten partiellen Ableitungen von F die Ableitungen erster Ordnung

der Richtungscosinus der Normale einführt, welche letzteren für die Flächendarstellung $F(x, y, z) = 0$ durch § 8 (4) gegeben werden. Wird nämlich zur Abkürzung $\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = W$ gesetzt, sodass $F_1 = XW$, $F_2 = YW$, $F_3 = ZW$, so ergibt sich

$$F_{11} = W\frac{\partial X}{\partial x} + X\frac{\partial W}{\partial x}, \quad F_{21} = W\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\frac{\partial W}{\partial x},$$

$$F_{31} = W\frac{\partial Z}{\partial x} + Z\frac{\partial W}{\partial x} \text{ etc.}$$

Setzt man sämmtliche zwölf Ausdrücke, sowie $\varrho' = -\frac{W}{\varrho}$, in die Determinante (8) ein, addirt dann die mit $-\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial x}$ multiplicirte vierte Colonne zur ersten und macht die analogen Operationen auch mit den anderen Colonnen, dividirt endlich die entstehende Gleichung durch W^4, so folgt

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}, & \frac{\partial X}{\partial y}, & \frac{\partial X}{\partial z}, & X \\ \frac{\partial Y}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{1}{\varrho}, & \frac{\partial Y}{\partial z}, & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial x}, & \frac{\partial Z}{\partial y}, & \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{1}{\varrho}, & Z \\ X, & Y, & Z, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Hier multipliciren wir die ersten drei Zeilen mit $-\varrho X$, $-\varrho Y$, $-\varrho Z$ und addiren zur letzten, benutzen dabei die Ableitungen der Identität $\Sigma X^2 = 1$: dann bleibt die gesuchte Gleichung

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}, & \frac{\partial X}{\partial y}, & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{1}{\varrho}, & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x}, & \frac{\partial Z}{\partial y}, & \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{1}{\varrho} \end{vmatrix} = 0,$$

aus welcher sich u. a. für die Summe der Hauptkrümmungen der elegante Ausdruck ergibt:

$$(10) \qquad H = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

§ 19.

Als Beispiel für die allgemeinen Resultate der letzten Paragraphen sollen die Hauptkrümmungsradien einer Rotationsfläche berechnet werden. Eine Rotationsfläche wird erzeugt durch Drehung einer ebenen Curve um eine feste, in ihrer Ebene gelegene Gerade, die Axe der Fläche, ohne dass bei dieser Drehung die gegenseitige Lage der Curve

und der Geraden verändert wird. Jeder Punkt der Curve beschreibt alsdann einen Kreis, welcher Parallelkreis genannt wird; die erzeugende Curve selbst wird als Meridian der Rotationsfläche bezeichnet.

Um die Gleichung einer Rotationsfläche aufzustellen, nehmen wir die Axe als z-Axe, die Ebene, in welcher die erzeugende Curve sich ursprünglich befindet, als (xz)-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems an. Die Gleichung der Curve sei

$$z = f(x).$$

Wir denken uns dann die Fläche durch irgend eine Ebene geschnitten, welche die Axe enthält, und nehmen in dieser Ebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem (u, z) an. Da die Ebene aus der Fläche eine der ursprünglichen congruente Curve ausschneidet, so muss

$$z = f(u)$$

die Gleichung derselben sein. Nun ist, wie sofort ersichtlich, für alle Punkte einer beliebigen Meridiancurve

$$u^2 = x^2 + y^2;$$

demnach ist

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \tag{1}$$

die Gleichung der Rotationsfläche.

Aus (1) folgt durch Differentiation:

$$p = f'(u)\frac{x}{u}, \quad q = f'(u)\frac{y}{u},$$

$$r = f'(u)\frac{y^2}{u^3} + f''(u)\frac{x^2}{u^2},$$

$$s = -f'(u)\frac{xy}{u^3} + f''(u)\frac{xy}{u^2},$$

$$t = f'(u)\frac{x^2}{u^3} + f''(u)\frac{y^2}{u^2}.$$

Diese Ausdrücke können für unseren Zweck noch vereinfacht werden. Da nämlich die Rotationsfläche in allen Punkten eines Parallelkreises gleich gestaltet ist, so brauchen wir sie nur für den Punkt zu untersuchen, in welchem der Parallelkreis vom Radius u die (xz)-Ebene schneidet. In diesem Punkte ist

$$y = 0, \quad x = u,$$

also

$$p = f'(x), \quad q = 0, \quad r = f''(x), \quad s = 0, \quad t = \frac{f'(x)}{x}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in § 16 (8), so folgt

$$\frac{f'(x)f''(x)}{x}\varrho^2 - \left[f''(x) + (1+f'(x)^2)\frac{f'(x)}{x}\right]\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot\varrho + (1+f'(x)^2)^2 = 0$$

oder

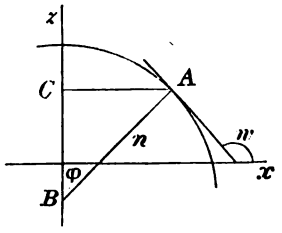
$$(2)\quad \varrho^2 - \left[\frac{x\sqrt{1+f'(x)^2}}{f'(x)} + \frac{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}\right]\varrho + \frac{x(1+f'(x)^2)^2}{f'(x)f''(x)} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$(3)\qquad \varrho_1 = \frac{x\sqrt{1+f'(x)^2}}{f'(x)},\quad \varrho_2 = \frac{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Der zweite Ausdruck stellt den Krümmungshalbmesser der Meridiancurve dar; von dem ersten ist leicht zu zeigen, dass er, abgesehen vom Vorzeichen, das Stück der Normale repräsentirt, welches sich von dem betrachteten Punkte bis zur Axe erstreckt. Ist nämlich in der Figur $AB = n$ dieses Stück, so hat man

Fig. 4.



$$n^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = x^2 + x^2\operatorname{ctg}^2\varphi = x^2(1+\operatorname{ctg}^2(\pi - w)).$$

Nun ist

$$\operatorname{tg} w = f'(x),$$

mithin

$$n^2 = x^2(1+\operatorname{ctg}^2 w) = \frac{x^2(1+f'(x)^2)}{f'(x)^2}.$$

Was das Vorzeichen der Quadratwurzel in (3) betrifft, so folgt aus der Ableitung dieser Ausdrücke, dass es in beiden dasselbe, und zwar nach den früheren Festsetzungen das positive sein muss.

Von besonderem Interesse ist diejenige Rotationsfläche, welche durch die Eigenschaft

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 0$$

definirt wird. Setzt man $f'(x) = \frac{dz}{dx} = z'$, so ist ihre Meridiancurve nach (3) aus der Differentialgleichung

$$x\frac{dz'}{dx} + z'(1+z'^2) = 0$$

zu bestimmen, welche auch in der Form

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz'}{z'} - \frac{z'\,dz'}{1+z'^2} = 0$$

geschrieben werden kann. Die Integration liefert zunächst

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{a}{x},\quad dz = \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

hieraus folgt durch nochmalige Ausführung einer Quadratur, bei passender Bezeichnung der Integrationsconstante:

$$\sqrt{x^2 - a^2} + x = a e^{\frac{z+b}{a}}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} - x = -a e^{-\frac{z+b}{a}},$$

d. h. endlich

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z+b}{a}} + e^{-\frac{z+b}{a}}\right).$$

Dies ist die Gleichung einer Kettenlinie.

Aus den Gleichungen (3) kann man entnehmen, dass eine Rotationsfläche im Allgemeinen ganze Curven von Kreispunkten, sogenannte Linien sphärischer Krümmung (§ 12) enthält. Setzt man nämlich $\varrho_1 = \varrho_2$, so ergibt sich

$$xf''(x) - f'(x)(1 + f'(x)^2) = 0, \tag{4}$$

eine Gleichung, welche durch ihre Wurzeln eine Anzahl von Parallelkreisen bestimmt. Jeder Punkt eines solchen Parallelkreises ist, falls der Kreis reell ist, ein Nabelpunkt.

Es sei z. B.

$$z^2 = 2a(x + a)$$

die Gleichung einer Parabel, welche durch Rotation um die z-Axe (eine der Directrix parallele Gerade) eine Fläche vierten Grades erzeugt. Hier ist

$$f(x) = \sqrt{2a(x + a)},$$

mithin

$$f(x) \cdot f'(x) = a, \quad f(x)f''(x) + f'(x)^2 = 0,$$

oder

$$f'(x) = \frac{a}{z}, \quad f''(x) = -\frac{a^2}{z^3}.$$

Setzt man dies in die obige Gleichung (4) ein, so folgt

$$x = -\frac{2a + a}{3},$$

woraus

$$z = \pm\sqrt{\frac{2a(a - a)}{3}}.$$

Demnach existiren für die betrachtete Fläche, falls $\alpha > a$, zwei Linien sphärischer Krümmung.

Schneidet die Meridiancurve die Rotationsaxe und hat sie in dem Schnittpunkte ein Maximum oder Minimum, so ist auch dieser Schnittpunkt als ein Kreispunkt zu betrachten. Dies folgt aus (3) durch Berechnung des wahren Wertes von ϱ_1, welcher für

$$x = 0, \quad f'(x) = 0$$

zunächst in unbestimmter Form erscheint.

Sollen die Coordinaten der Rotationsfläche durch zwei unabhängige Variable dargestellt werden, so kann man setzen

$$(5) \qquad \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = f(u), \end{cases}$$

was der Einführung von Polarcoordinaten in der (xy)-Ebene entspricht. Die Linien $u = \text{const.}$ geben die Parallelkreise, $v = \text{const.}$ die Meridiane der Fläche. Aus (5) erhält man

$$\begin{aligned} dx &= \cos v du - u \sin v dv \\ dy &= \sin v du + u \cos v dv \\ dz &= f'(u) du, \end{aligned}$$

und hieraus das Quadrat des Linienelements

$$(6) \qquad ds^2 = (1 + f'(u)^2)\, du^2 + u^2 dv^2.$$

Es werde noch eine Variable u' definirt durch die Gleichung

$$\sqrt{1 + f'(u)^2}\, du = du',$$

und es sei f so beschaffen, dass aus dieser Gleichung oder der äquivalenten

$$\int_{u_0}^{u} \sqrt{1 + f'(u)^2}\, du + C = u'$$

sich auch umgekehrt für einen gewissen Bereich von u' die Grösse u als eindeutige Function von u' herausstellt. Die Gleichung $u' = \text{const.}$ liefert wiederum die Schaar der Parallelkreise, nur im Allgemeinen in anderer Anordnung als vorher die Gleichung $u = \text{const.}$ Setzt man jetzt

$$u^2 = \varphi(u'),$$

wo φ eine eindeutige Function bezeichnet, und schreibt für u' wieder u, so geht (6) über in

$$(7) \qquad ds^2 = du^2 + \varphi(u) dv^2.$$

Man kann also dadurch, dass man die Parallelkreise und Meridiane einer Rotationsfläche zu Coordinatenlinien wählt, bewirken, dass

$$(8) \qquad E = 1, \quad F = 0, \quad G = \varphi(u)$$

wird. — Die neu eingeführte Variable u' repräsentirt die Bogenlänge der Meridiancurve.

§ 20.

Um die Gestalt einer Fläche in der Nähe eines bestimmten Punktes zu untersuchen, betrachtet man nach Dupin sehr zweckmässig die Schnitte der Fläche mit Ebenen, welche in beliebig kleinen Abständen

der Tangentialebene parallel laufen. Es sei (xyz) der gegebene, $(\xi\eta\zeta)$ ein unendlich naher Punkt der Fläche, und

$$\xi = x + h, \quad \eta = y + k,$$

mithin $$\zeta = \varphi(x + h, y + k),$$

wenn die Fläche in der dritten Form gegeben ist. Nach den Voraussetzungen über die Existenz und Stetigkeit der ersten und zweiten partiellen Ableitungen von φ nach x und y kann man schreiben

$$\varphi(x + h, y + k) = \varphi(x, y) + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + h^2\alpha + hk\beta + k^2\gamma,$$

wo α, β, γ gleichzeitig mit h und k unendlich klein werden. Das Coordinatensystem sei nun so gewählt, dass der gegebene Punkt Anfangspunkt, die Tangentialebene die Ebene der (xy) ist, und dass die (xz)- und (yz)-Ebene mit den beiden Hauptnormalebenen zusammenfallen. Dann verschwinden (cf. § 16) die Grössen x, y, z, p, q, s für den Punkt A, ferner ist

$$r = \frac{1}{\varrho_1}, \quad t = \frac{1}{\varrho_2},$$

und man hat vermöge der obigen Gleichungen

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{\varrho_1} + \frac{\eta^2}{\varrho_2}\right) + \xi^2\alpha + \xi\eta\beta + \eta^2\gamma$$

als Beziehung zwischen den Coordinaten der Flächenpunkte, welche A benachbart sind. Es sei jetzt δ eine unendlich kleine Grösse, so ist

$$\zeta = \delta$$

die Gleichung einer Ebene, welche im Abstande δ der (xy)-Ebene parallel geht. Combinirt man sie mit der vorhergehenden Relation und bleibt bei den unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung stehen, so erhält man mit unbegrenzter Genauigkeit

$$\frac{\xi^2}{\varrho_1} + \frac{\eta^2}{\varrho_2} = 2\delta \tag{1}$$

$$\zeta = \delta \tag{2}$$

für die Gleichungen der Curve, in welcher die genannte Ebene die Fläche schneidet. Diese Curve ist mithin ein Kegelschnitt, dessen Halbaxenquadrate gleich den absoluten Beträgen von $2\delta\varrho_1$ und $2\delta\varrho_2$ sind. δ war unendlich klein; ist daher der Kegelschnitt geschlossen, so begrenzt er einen unendlich kleinen Flächeninhalt. In Folge dessen sagt man allgemein: Eine Ebene, welche der Tangentialebene parallel und unendlich nahe ist, schneidet die Fläche in einem unendlich kleinen Kegelschnitt. Er wird als der Dupin'sche Kegelschnitt oder die Indicatrix der Fläche für den gegebenen Punkt bezeichnet.

Die verschiedenen Formen, welche die Indicatrix haben kann, hängen von den Vorzeichen der Hauptkrümmungsradien ab. Es seien erstens ϱ_1 und ϱ_2 gleichbezeichnet, also $\varrho_1 \varrho_2 > 0$, und zwar werde, um einen bestimmten Fall anzunehmen, beiden Grössen das positive Zeichen erteilt. Ist dann δ ebenfalls positiv, so ist der Dupin'sche Kegelschnitt eine Ellipse

$$\frac{\xi^2}{2\delta\varrho_1} + \frac{\eta^2}{2\delta\varrho_2} = 1;$$

für negatives δ dagegen, $\delta = -\delta'$, erhält man die imaginäre Curve

$$\frac{\xi^2}{2\delta'\varrho_1} + \frac{\eta^2}{2\delta'\varrho_2} = -1.$$

Die letztere Annahme entspricht einer Schnittebene auf der entgegengesetzten Seite der Tangentialebene wie vorher. Man hat also folgendes Resultat: Ist das Product der Hauptkrümmungsradien positiv, so liegt die Fläche in der Nähe des betrachteten Punktes ganz auf einer Seite der Tangentialebene, oder diese Ebene berührt die Fläche im eigentlichen Sinne. Ein solcher Flächenpunkt wird als ein elliptischer bezeichnet, und man sagt, dass die Fläche in ihm convex gestaltet ist.

Es seien zweitens ϱ_1 und ϱ_2 von verschiedenem Zeichen, d. h. $\varrho_1 \varrho_2 < 0$. Und zwar sei die Bezeichnung so gewählt, dass $\varrho_2 > 0$, $\varrho_1 = -\varrho_1' < 0$. Für positives δ ist die eine Gleichung der Indicatrix

$$\frac{\eta^2}{2\delta\varrho_2} - \frac{\xi^2}{2\delta\varrho_1'} = 1,$$

für negatives δ, $= -\delta'$:

$$\frac{\xi^2}{2\delta'\varrho_1'} - \frac{\eta^2}{2\delta'\varrho_2} = 1.$$

Beide Curven, welche in eine und dieselbe Ebene verlegt zwei conjugirte Hyperbeln darstellen, sind reell. Ist also das Product der beiden Hauptkrümmungsradien negativ, so liegt die Fläche in der Nähe des betrachteten Punktes auf beiden Seiten der Tangentialebene, oder diese Ebene schneidet die Fläche. Für einen solchen Punkt heisst die Fläche convex-concav oder sattelförmig, der Punkt selbst wird als ein hyperbolischer bezeichnet.

In besonderen Fällen kann einer der beiden Hauptkrümmungsradien unendlich gross sein. Dies tritt ein (cf. § 16 (13)), wenn bei unserer Wahl des Coordinatensystems noch r oder t gleich Null ist. Ist z. B. $t = 0$, so erhält man

$$\xi^2 = 2\delta\varrho_1$$

oder

$$(\xi + \sqrt{2\delta\varrho_1})(\xi - \sqrt{2\delta\varrho_1}) = 0,$$

d. h. der Dupin'sche Kegelschnitt zerfällt in zwei parallele Gerade, welche nur reell sind, wenn δ dasselbe Vorzeichen hat wie ϱ_1. Die Fläche liegt also, falls nicht weitere Voraussetzungen hinzugenommen werden, ganz auf einer Seite der Tangentialebene.

Zu bemerken wären ferner noch die Specialannahmen, dass die beiden Hauptkrümmungsradien einander gleich oder entgegengesetzt gleich sind. Hat man erstens

$$\varrho_1 = \varrho_2,$$

so wird die Indicatrix ein Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 = 2\delta\varrho_1,$$

wodurch der Name „Kreispunkt" (§ 12) für einen derartigen Flächenpunkt gerechtfertigt wird. Ist dagegen

$$\varrho_1 = -\varrho_2,$$

so wird der Dupin'sche Kegelschnitt durch eine von zwei conjugirten gleichseitigen Hyperbeln dargestellt, welche in der Gleichung

$$\xi^2 - \eta^2 = 2\delta\varrho_1$$

für die verschiedenen Zeichen von δ enthalten sind.

In allen Fällen ist der Dupin'sche Kegelschnitt demjenigen ähnlich, welcher im § 14 zur Veranschaulichung des Euler'schen Satzes construirt wurde. Führt man auch hier Polarcoordinaten ein und nimmt den Euler'schen Satz hinzu, so findet man ganz analog wie dort, dass der Krümmungsradius eines jeden Normalschnitts dem Quadrate desjenigen Halbdurchmessers R des Dupin'schen Kegelschnitts proportional ist, welchen der Normalschnitt enthält. Man kann nämlich allgemein setzen

$$R^2 = 2\delta\varrho.$$

Die eben abgeleiteten Resultate sind von der Wahl des Coordinatensystems unabhängig. Geht man daher zu den allgemeinen Annahmen über die Darstellung einer Fläche zurück, so hat man zu schreiben

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \begin{cases} \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} & [\S\ 12\ (9)] \\ \dfrac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2} & [\S\ 16\ (8)] \\ \dfrac{-K}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^2} & [\S\ 18\ (5, 1)] \end{cases} \tag{3}$$

und braucht, da die Nenner dieser Ausdrücke wesentlich positiv sind, nur die Zähler hinsichtlich ihres Vorzeichens zu untersuchen, um die Gestalt der Fläche in der Nähe des gegebenen Punktes zu erkennen.

Beispiel der Flächen zweiten Grades:

I) Die Mittelpunktsflächen werden durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=\varepsilon$$

repräsentirt, in welcher $\varepsilon=0$ oder $=1$ ist. Zur Bestimmung der partiellen Ableitungen dienen die Formeln

$$\frac{x}{A}+\frac{zp}{C}=0,\quad \frac{y}{B}+\frac{zq}{C}=0,$$

$$\frac{1}{A}+\frac{zr}{C}+\frac{p^2}{C}=0,\quad \frac{zs}{C}+\frac{pq}{C}=0,\quad \frac{1}{B}+\frac{zt}{C}+\frac{q^2}{C}=0,$$

woraus

$$p=-\frac{C}{z}\frac{x}{A},\quad q=-\frac{C}{z}\frac{y}{B},$$

$$r=-\frac{C^2}{Az^3}\left(\varepsilon-\frac{y^2}{B}\right),\quad s=-\frac{C^2}{z^3}\frac{xy}{AB},\quad t=-\frac{C^2}{Bz^3}\left(\varepsilon-\frac{x^2}{A}\right),$$

$$rt-s^2=\frac{C^4}{ABz^6}\left[\left(\varepsilon-\frac{x^2}{A}\right)\left(\varepsilon-\frac{y^2}{B}\right)-\frac{x^2y^2}{AB}\right]$$

$$=\frac{C^4}{z^4}\frac{\varepsilon}{ABC}.$$

Bei passender Wahl des Axensystems kann gesetzt werden:

für das Ellipsoid: $\varepsilon=1;\ A, B, C>0,\ rt-s^2>0,$

für das einschalige Hyperboloid: $\varepsilon=1;\ A, B>0, C<0,\ rt-s^2<0,$

für das zweischalige Hyperboloid: $\varepsilon=1;\ A>0, B, C<0,\ rt-s^2>0,$

für den Kegel: $\varepsilon=0;\ A, B>0,\ C<0,\ rt-s^2=0.$

II) Die Flächen ohne Mittelpunkt sind in der Gleichung

$$z=\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}$$

enthalten, aus welcher folgt:

$$p=\frac{2x}{A},\quad q=\frac{2y}{B},\quad r=\frac{2}{A},\quad s=0,\quad t=\frac{2}{B},\quad rt-s^2=\frac{4}{AB}.$$

Für das elliptische Paraboloid ist $A>0,\ B>0,\ rt-s^2>0,$

für das hyperbolische Paraboloid $A>0,\ B<0,\ rt-s^2<0.$

Hiernach sind das Ellipsoid, das zweischalige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid überall convex gestaltet, das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid überall convex-concav. Für den Kegel ist stets einer der beiden Hauptkrümmungsradien unendlich gross.

§ 21.

Fasst man zwei conjugirte Durchmesser des Dupin'schen Kegelschnitts in's Auge und bezeichnet mit ψ und ψ' die durch Drehung

in einem bestimmten Sinn erhaltenen, $< \pi$ angenommenen Winkel dieser Durchmesser mit der ersten Halbaxe des Kegelschnitts, so ist

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\psi' = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Zwei Flächentangenten, welche solchen conjugirten Durchmessern entsprechen, heissen conjugirte Tangenten. Man kann ein Paar derartiger Linien auch durch folgende Construction definiren. Vom Punkte A aus gehe man in einer beliebigen Richtung zu einem benachbarten Flächenpunkte B fort und lege in diesem, ebenso wie in A, die Tangentialebene an die Fläche. Beide Ebenen schneiden sich in einer Geraden t, welche, falls B dem A unendlich nahe kommt, als Tangente der Fläche in A aufgefasst werden kann. Die Richtung von A nach B bestimmt eine zweite Tangente τ; behauptet wird, dass t und τ conjugirt sind.

Die Fläche sei durch drei Functionen zweier Variablen u, v gegeben. Für laufende Coordinaten $\xi\ \eta\ \zeta$ sind dann die beiden Tangentialebenen in $A \equiv (x, y, z)$ und $B \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$ durch die Gleichungen bestimmt:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0 \\ &(X + dX)(\xi - x - dx) + (Y + dY)(\eta - y - dy) \\ &\qquad + (Z + dZ)(\zeta - z - dz) = 0. \end{aligned}$$

Für die Punkte $(\xi\ \eta\ \zeta)$, welche der Geraden t angehören, gelten beide Gleichungen gleichzeitig. Daher wird die zweite, wenn man noch die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt,

$$\text{(3)} \qquad (\xi - x)\,dX + (\eta - y)\,dY + (\zeta - z)\,dZ = 0.$$

$\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ sind den Richtungscosinus von t, dx, dy, dz denen von τ proportional. Nimmt man $(\xi\ \eta\ \zeta)$ dem Punkte A unendlich nahe und setzt

$$\xi - x = \delta x = \frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v \text{ etc.},$$

so kann man die beiden Tangenten auch durch die Verhältnisse $\frac{dv}{du}$ und $\frac{\delta v}{\delta u}$ bestimmen, und erhält aus (3):

$$\text{(4)} \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right)\left(\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv\right) = 0,$$

während (2) identisch erfüllt wird. Die Coefficienten $\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}$ etc. in dieser Gleichung sind im § 11 gegeben worden. Mit Benutzung der dort gefundenen Resultate geht (4) über in:

$$\text{(5)} \qquad L du\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + N dv\delta v = 0.$$

Es seien jetzt speciell $u = x$, $v = y$ angenommen und für L, M, N die Werte § 16 (3) gesetzt. Dann wird die Relation unter den beiden Tangenten:

$$r dx \delta x + s(dx \delta y + dy \delta x) + t dy \delta y = 0. \tag{6}$$

Endlich wähle man noch das Coordinatensystem in der § 16 beschriebenen Weise, sodass

$$r = \frac{1}{\varrho_1}, \quad s = 0, \quad t = \frac{1}{\varrho_2}$$

wird, und

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \psi, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \operatorname{tg} \psi'$$

gesetzt werden kann; dann folgt

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \psi' = 0,$$

d. h. die Gleichung (1). Die beiden durch die angegebene Construction bestimmten Tangenten sind daher, wie behauptet wurde, einander conjugirt.

Werden die krummlinigen Coordinaten u, v so gewählt, dass in jedem Punkte die Tangenten an die Linien $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ zwei conjugirte Richtungen bilden, so muss die Gleichung (5) durch

$$dv = 0, \qquad \delta u = 0$$

erfüllt werden, und umgekehrt. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die gemachte Annahme ist also

$$M = 0.$$

Soll eine Flächentangente sich selbst conjugirt sein, so muss in (5)

$$\frac{\delta v}{\delta u} = \frac{dv}{du}$$

gesetzt werden können. Dies gibt

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0, \tag{7}$$

d. h. [§ 14 (5)] die Inflexionstangenten und nur sie genügen der gestellten Bedingung.

Dies Resultat könnte u. a. auch dadurch abgeleitet werden, dass man den Winkel

$$\psi' - \psi = \omega$$

zweier conjugirten Richtungen bildet und dann $\omega = 0$ setzt. Aus (1) ergibt sich zunächst

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{\frac{\cos^2 \psi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \psi}{\varrho_2}}{\cos \psi \sin \psi \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)}, \tag{8}$$

und hieraus weiter:

$$\sin\omega = \varepsilon \frac{\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2}}{\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2^2}}} \tag{9}$$

$$\cos\omega = \frac{\varepsilon \cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)}{\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2^2}}}. \tag{10}$$

Unter Beibehaltung der anfänglichen Annahme ist das Zeichen so zu bestimmen, dass $\sin\omega$ positiv wird. Setzt man jetzt $\sin\omega = 0$ und benutzt den Euler'schen Satz, so wird man wieder auf die Gleichung (7) geführt.

Es sei noch ein Satz erwähnt, welcher sich denen des § 14 an die Seite stellen lässt: Die Summe der Krümmungsradien, welche zwei conjugirten Normalschnitten entsprechen, ist constant und gleich der Summe der Hauptkrümmungshalbmesser. Sind nämlich die Winkel ψ und χ in den Gleichungen § 14, (1, 2) durch die Relation

$$\operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\chi = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

verbunden, so ergibt sich

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\varrho_1 \sin^2\psi + \varrho_2 \cos^2\psi}{\varrho_1^2 \sin^2\psi + \varrho_2^2 \cos^2\psi}.$$

Aus dieser Gleichung und der des Euler'schen Satzes folgt aber

$$\varrho + \varrho' = \varrho_1 + \varrho_2. \tag{11}$$

§ 22.

Die Bedingung für zwei conjugirte Tangenten hört auf, in der Form § 21 (1) zu gelten, wenn die beiden Geraden auf einander senkrecht stehen, weil dann $\operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\psi' = -1$ ist. Schreibt man aber

$$\varrho_1 \sin\psi \sin\psi' + \varrho_2 \cos\psi \cos\psi' = 0, \tag{1}$$

so gilt diese Gleichung in allen Fällen. Denn nimmt man die Bedingung der Orthogonalität hinzu:

$$\sin\psi \sin\psi' + \cos\psi \cos\psi' = 0, \tag{2}$$

so ergibt sich $\sin\psi = 0$, $\cos\psi' = 0$ oder $\sin\psi' = 0$, $\cos\psi = 0$; d. h. die Haupttangenten und nur sie haben die Eigenschaft, gleichzeitig conjugirt und senkrecht zu sein. Dies hätte keines Beweises bedurft, wenn wir ein bekanntes Ergebnis der Kegelschnitt-Theorie auf den Dupin'schen Kegelschnitt angewandt hätten, dessen Axen eben den Haupttangenten entsprechen.

Die Eigenschaft der Haupttangenten, conjugirt zu sein, muss sich aus ihrer Gleichung ablesen lassen. Es seien allgemein zwei Tangenten durch eine quadratische Gleichung

$$a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 = 0$$

definirt (cf. § 6). Die Bedingung dafür, dass sie conjugirt sind, wird aus § 21 (5) erhalten, wenn man für $\frac{dv}{du}, \frac{\delta v}{\delta u}$ die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 dieser Gleichung setzt. Man erhält also

$$L + M(\lambda_1 + \lambda_2) + N\lambda_1\lambda_2 = 0$$

oder

$$Na_{11} - 2Ma_{12} + La_{22} = 0. \tag{3}$$

In der That gilt für die Haupttangenten (cf. § 15) die Relation:

$$-N\vartheta + M(\vartheta' - \eta) + L\eta' = 0.$$

Die Bedingung (1) und die Gleichung § 21 (5) besagen dasselbe in verschiedener Form. In Folge dessen muss zwischen ihren linken Seiten eine Beziehung bestehen, der Art, dass gleichzeitig mit der einen auch die andere verschwindet. Wenn man nun die Gleichung aufstellt, welche diese Beziehung vermittelt, so gelangt man zu einem geometrischen Ausdruck der bilinearen Differentialform

$$\mathfrak{B} = Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v.$$

Und zwar ergibt sich der gesuchte Ausdruck von selbst, wenn man die Grösse $\varrho_1 \sin\psi \sin\psi' + \varrho_2 \cos\psi \cos\psi'$ mit Hilfe der Formeln des § 4 berechnet. Welche Richtung man dabei für die beiden, durch die Winkel ψ, ψ' gegebenen Flächentangenten in's Auge fasst, ist gleichgiltig, da eine Veränderung jener Winkel um π höchstens das Zeichen des betrachteten Ausdrucks ändern kann. Dass keine der Haupttangenten vor der anderen bevorzugt ist, sieht man sofort, wenn man noch die Winkel χ, χ' der beiden Tangenten mit der zweiten Haupttangente einführt. Denn dann wird

$$\sin\psi \sin\psi' = \cos\chi \cos\chi',$$

und der betrachtete Ausdruck erhält die völlig symmetrische Form

$$\varrho_1 \cos\chi \cos\chi' + \varrho_2 \cos\psi \cos\psi'.$$

Vorausgesetzt wird bei allen Untersuchungen, welche sich auf conjugirte Tangenten beziehen, dass keiner der Hauptkrümmungsradien unendlich gross ist, dass also [§ 12 (13, 14)] die Determinante $LN - M^2$ der bilinearen Form $\mathfrak{B}$ von Null verschieden ist.

Führt man jetzt die angedeutete Rechnung wirklich durch, wobei die Gleichung [§ 12 (7)]

(4) $$\lambda_1 = -\frac{F - M\varrho_1}{G - N\varrho_1}$$

zu benutzen ist, und bezeichnet mit s_1' den Wert von $\frac{ds}{du}$ für die erste Haupttangente, so erhält man aus § 4 (8, 6):

$$\sin\psi = \frac{T[(G - N\varrho_1)\,dv + (F - M\varrho_1)\,du]}{(G - N\varrho_1)\,s_1'\,ds}$$

$$\cos\psi = \frac{(G - N\varrho_1)\,(Edu + Fdv) - (F - M\varrho_1)\,(Fdu + Gdv)}{(G - N\varrho_1)\,s_1'\,ds}.$$

In den entsprechenden Functionen des Winkels ψ' sind du, dv durch δu, δv zu ersetzen. Hieraus folgt weiter, mit Hinzuziehung der Gleichungen § 12 (8, 12):

$$\varrho_1 \sin\psi\sin\psi' + \varrho_2 \cos\psi\cos\psi'$$
$$= \frac{-T^2\varrho_1(\varrho_1 - \varrho_2)}{(G - N\varrho_1)s_1'^2 ds\delta s}\,[Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v].$$

Nun ist

$$s_1'^2 = E + 2F\lambda_1 + G\lambda_1^2 = \frac{T^2}{G - N\varrho_1}(2 - H\varrho_1) = \frac{T^2}{G - N\varrho_1}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right);$$

mithin wird schliesslich

(5) $$Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v$$
$$= ds\delta s\left(\frac{\cos\psi\cos\psi'}{\varrho_1} + \frac{\sin\psi\sin\psi'}{\varrho_2}\right).$$

Werden die beiden Tangenten als die der Coordinatenlinien angenommen, so ergibt sich ein Ausdruck für M. Man erhält nämlich für $dv = 0$, $\delta u = 0$:

$$ds = \varepsilon\sqrt{E}\,du, \qquad \delta s = \varepsilon'\sqrt{G}\,\delta v,$$

und daher:

(6) $$M = \sqrt{EG}\left(\frac{\cos\psi\cos\psi'}{\varrho_1} + \frac{\sin\psi\sin\psi'}{\varrho_2}\right),$$

wenn man jetzt unter ψ und ψ' die Winkel versteht, welche die positiven Richtungen der Coordinatenlinien mit der ersten Haupttangente bilden. Die Richtung, welche für die letztere bevorzugt wird, bleibt gleichgiltig.

§ 23.

Die eben gegebene Formel liefert einen Ausdruck der Fundamentalgrösse zweiter Ordnung M durch E und G, die beiden Hauptkrümmungsradien und zwei Winkelgrössen. Will man ähnliche Werte auch für die beiden anderen Fundamentalgrössen zweiter Ordnung aufstellen, so hat man die Gleichungen für die beiden Invarianten (Quantitäten, welche von der Wahl der Coordinaten unabhängig sind) H und K hinzuzunehmen. Nach § 12 (12, 13) ist:

$$(1) \qquad GL - 2FM + EN = T^2 H$$

$$(2) \qquad LN - M^2 = T^2 K.$$

Es bestehen also drei Gleichungen, aus welchen L, M, N zu ermitteln sind. Das Resultat der Rechnung lässt sich leicht von vornherein übersehen. Setzt man nämlich in dem Ausdruck der Krümmung für einen beliebigen Normalschnitt

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2}$$

einmal $dv = 0$, sodann $du = 0$, und bezeichnet mit ϱ_u, ϱ_v die Krümmungsradien der Normalschnitte, welche durch die Tangenten der Coordinatenlinien hindurchgehen, so erhält man

$$(3) \qquad \frac{1}{\varrho_u} = \frac{L}{E}, \qquad \frac{1}{\varrho_v} = \frac{N}{G},$$

und mit Benutzung des Euler'schen Satzes:

$$(4) \qquad L = E\left(\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2}\right), \qquad N = G\left(\frac{\cos^2\psi'}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\psi'}{\varrho_2}\right).$$

Um diese Werte durch directe Rechnung aus den obigen drei Formeln zu erhalten, formen wir zunächst den Ausdruck von M noch etwas um, indem wir den Winkel ψ' eliminiren und dafür die Fundamentalgrösse F oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Coordinatenwinkel ϑ einführen. Wie man leicht sieht, ist stets entweder

$$\psi' = \vartheta + \psi \quad \text{oder} \quad \psi' = \vartheta + \psi - 2\pi,$$

daher in allen Fällen

$$(5) \qquad M = \sqrt{EG}\left[\frac{\cos\psi\cos(\vartheta+\psi)}{\varrho_1} + \frac{\sin\psi\sin(\vartheta+\psi)}{\varrho_2}\right].$$

Löst man die Functionen des zusammengesetzten Arguments auf und benutzt die Gleichungen (§ 3)

$$\cos\vartheta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \sin\vartheta = \frac{T}{\sqrt{EG}},$$

so folgt

$$(6) \qquad M = F\left(\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2}\right) - T\sin\psi\cos\psi\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$T^2 H + 2FM = A, \qquad T^2 K + M^2 = B,$$

so gehen die Gleichungen (1, 2) über in

$$GL + EN = A, \qquad LN = B,$$

woraus

$$L = \frac{1}{2G}\left(A \pm \sqrt{A^2 - 4EGB}\right),$$

$$N = \frac{1}{2E}\left(A \mp \sqrt{A^2 - 4EGB}\right),$$

und die Ausrechnung liefert

$$A^2 - 4EGB = E^2G^2(H^2 - 4K)\sin^2\vartheta\sin^2(\vartheta + 2\psi).$$

Daher wird

$$L = \frac{1}{2G}\left[A \pm EG\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\sin\vartheta\sin(\vartheta + 2\psi)\right]$$

$$N = \frac{1}{2E}\left[A \mp EG\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\sin\vartheta\sin(\vartheta + 2\psi)\right].$$

Zur Bestimmung des Zeichens werde Folgendes festgesetzt. Es seien die Coordinatenlinien so gewählt, dass ihre Tangenten stets mit den Haupttangenten zusammenfallen, dass also ϱ_u und ϱ_v mit den beiden Grössen ϱ_k übereinstimmen. Wir kommen auf das wichtige System der Haupttangentencurven im nächsten Abschnitt zurück. Die Bezeichnung sei nun so getroffen, dass ϱ_1 mit ϱ_u identisch, also gleich $\frac{E}{L}$ wird. Alsdann gelten in den beiden eben aufgestellten Ausdrücken die oberen Zeichen, wie man sofort bemerkt, wenn man $\psi = 0$, ferner (nach vor. §) $F = 0$, $M = 0$, mithin $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $A = EG\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$ setzt. Da nun allgemein

$$A = EG\left[\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\cos\vartheta\cos(\vartheta + 2\psi)\right]$$

ist, so ergibt sich

$$(7)\qquad \begin{cases} L = \frac{E}{2}\left[\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\cos 2\psi\right] \\ N = \frac{G}{2}\left[\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\cos 2(\vartheta + \psi)\right] \end{cases}$$

oder auch

$$(8)\qquad \begin{cases} L = E\left(\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2}\right) \\ N = G\left(\frac{\cos^2(\vartheta + \psi)}{\varrho_1} + \frac{\sin^2(\vartheta + \psi)}{\varrho_2}\right), \end{cases}$$

welche Ausdrücke mit (4) übereinstimmen.

Ist die Fläche durch eine Gleichung $z = \varphi(x, y)$ dargestellt, so ergeben sich aus den eben gefundenen Werten von L, M, N mit Hilfe der Gleichungen § 16 (3, 1) folgende Ausdrücke für die zweiten Differentialquotienten:

$$(9)\qquad \begin{cases} r = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,(p^2 + 1)\left(\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2}\right) \\ s = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,\sqrt{(p^2 + 1)(q^2 + 1)}\left(\frac{\cos\psi\cos(\vartheta + \psi)}{\varrho_1} + \frac{\sin\psi\sin(\vartheta + \psi)}{\varrho_2}\right) \\ t = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,(q^2 + 1)\left(\frac{\cos^2(\vartheta + \psi)}{\varrho_1} + \frac{\sin^2(\vartheta + \psi)}{\varrho_2}\right). \end{cases}$$

In ihnen bedeutet jetzt ψ den Winkel, welchen die Tangente der ebenen Curve $y = \text{const.}$ in dem betrachteten Punkte mit der ersten Haupttangente bildet.

Nach § 8 (5) hat man noch

$$p = -\frac{X}{Z}, \quad q = -\frac{Y}{Z}. \tag{10}$$

Man kann also für die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung Ausdrücke finden, welche nur geometrisch definirte Grössen enthalten.

§ 24.

Die Theorie der Krümmung einer Fläche ist von Gauss durch eine Betrachtungsweise begründet worden, welche von der Theorie der Normalschnitte unabhängig ist, wenngleich sie in ihren Resultaten wieder auf diese führt. Sie ist derjenigen analog, durch welche man zum Begriff der Krümmung einer ebenen Curve gelangt. Sind A und B zwei benachbarte Punkte einer solchen Curve, ds das zwischen ihnen liegende Bogenelement, $d\omega$ der Bogen, welcher in einem Kreise vom Radius 1 zu dem Winkel der beiden in A und B errichteten Normalen gehört, so kann bekanntlich die Krümmung

$$k = \frac{d\omega}{ds}$$

gesetzt werden. Dementsprechend denke man sich nach Annahme einer Kugel, deren Mittelpunkt O beliebig (etwa der Anfangspunkt der Coordinaten), deren Radius gleich der Längeneinheit ist, jedem Punkte A einer Fläche denjenigen Punkt A' der Kugeloberfläche zugeordnet, welcher erhalten wird, wenn man OA' parallel der nach aussen gerichteten Normale des Punktes A zieht. Man sagt dann, die Fläche werde durch parallele Normalen auf die Einheitskugel abgebildet. Jeder Curve auf der Fläche entspricht bei dieser Abbildung eine sphärische Curve, jedem begrenzten Teil der Fläche ein Stück der Kugeloberfläche. Angenommen nun, der Teil der Fläche sei so gewählt, dass verschiedenen Punkten desselben auch stets verschiedene Punkte der Kugel zugehören, so bezeichnet man das durch diese Punkte erfüllte Stück der Kugelfläche als Totalkrümmung jenes Flächenteiles. Diese Definition lässt sich, durch zweckmässige Zerlegung des gegebenen Flächenstückes, leicht auf den Fall ausdehnen, dass jene Annahme nicht mehr erfüllt ist. Wichtiger ist jedoch der Begriff des Krümmungsmasses der Fläche für einen gegebenen Punkt. Dieser Punkt A werde als Eckpunkt eines unendlich kleinen Dreiecks $d\lambda$ auf der Fläche aufgefasst, welchem auf der Kugel das Dreieck dA correspondiren soll.

Da ein Punkt der Kugel durch die Coordinaten X, Y, Z bestimmt wird, diese Grössen aber stetige Functionen von u und v sind, so entsprechen benachbarten Punkten der gegebenen Fläche auch benachbarte Punkte der Kugel, und dA kann danach ebenfalls von vornherein als sehr klein vorausgesetzt werden. Der Grenzwert, welchem sich der Quotient

$$\frac{dA}{d\lambda}$$

nähert, wenn Divisor und Dividendus gegen Null convergiren, heisst abgesehen vom Vorzeichen, welches sogleich bestimmt werden wird, das Krümmungsmass in A. — Dass der eben definirte Grenzwert existirt, wird leicht durch wirkliche Ausrechnung gezeigt.

Die Dimensionen des Dreiecks $d\lambda$ sind unendlich klein; in Folge dessen kann dasselbe als geradlinig angesehen werden. Bildet man nun seine Projection $d\varphi$ auf die (xy)-Ebene, so ist mit unbegrenzter Genauigkeit

$$\pm\, d\varphi = Z d\lambda,$$

denn Z ist identisch mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Tangentialebene in A gegen die Ebene der (xy). Vermöge der Abbildung durch parallele Normalen sind die Tangentialebenen der Fläche und der Kugel in entsprechenden Punkten einander parallel; daher ergibt sich ebenso

$$\pm\, d\Phi = Z dA,$$

wenn $d\Phi$ die Projection von dA auf die (xy)-Ebene bedeutet. Hiernach wird das Krümmungmass

$$k = \pm \frac{d\Phi}{d\varphi}.$$

Es sei jetzt A_0 die Projection des Punktes A, B_0 und C_0 die Projectionen der beiden anderen Eckpunkte B, C von $d\lambda$, und

$$A_0 \equiv (x, y), \quad B_0 \equiv (x + dx,\ y + dy), \quad C_0 \equiv (x + \delta x,\ y + \delta y).$$

Dann ist

$$d\varphi = \varepsilon (dx\delta y - dy\delta x),$$

wo ε gleich $+1$ oder gleich -1 zu setzen ist, je nachdem A_0C_0 auf der positiven oder auf der negativen Seite der unbegrenzten Geraden A_0B_0 liegt. Unter der positiven Seite von A_0B_0 wird dabei (cf. § 4) diejenige verstanden, nach welcher sich die positive Richtung der y-Axe erstrecken würde, falls die Richtung A_0B_0 mit der positiven x-Axe zusammenfiele. In derselben Weise ergibt sich für

$$A_0' \equiv (X, Y), \quad B_0' \equiv (X + dX,\ Y + dY),$$
$$C_0' \equiv (X + \delta X,\ Y + \delta Y):$$
$$d\Phi = \varepsilon' (dX\delta Y - dY\delta X).$$

Sind nun ε und ε' in beiden Ausdrücken einander gleich, oder die beiden entsprechenden Dreiecke $d\varphi$ und $d\Phi$ ähnlich gelegen, so soll

$$k = \frac{d\Phi}{d\varphi}$$

sein; ist dies nicht der Fall, so soll der Ausdruck rechts noch das negative Zeichen erhalten. Hiernach wird in allen Fällen:

$$k = \frac{dX\delta Y - dY\delta X}{dx\delta y - dy\delta x}. \tag{1}$$

Setzt man nun

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \ldots$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v, \ldots$$

so ergibt sich:

$$dx\delta y - dy\delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)(du\delta v - dv\delta u)$$

$$dX\delta Y - dY\delta X = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right)(du\delta v - dv\delta u).$$

Ferner ist nach § 11 (10):

$$\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{1}{(EG - F^2)^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)(\eta\vartheta' - \vartheta\eta'),$$

und nach § 12 (13):

$$\eta\vartheta' - \vartheta\eta' = (EG - F^2)(LN - M^2).$$

Wird alles dies in (1) eingesetzt, so resultirt

$$k = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{2}$$

Dieser Ausdruck, aus welchem jede Beziehung auf die Punkte B und C verschwunden ist, welche zu seiner Herleitung dienten, soll nunmehr als Definition des Krümmungsmasses genommen werden.

Berücksichtigt man noch die Gleichungen § 12 (13, 14), so ergibt sich die Formel

$$k = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = K, \tag{3}$$

d. h. das Krümmungsmass ist gleich dem reciproken Werte des Products der beiden Hauptkrümmungsradien.

Für die Darstellungen (III) und (II) (§ 1) der Fläche erhält man hiernach die Werte des Krümmungsmasses aus § 20 (3). Und es folgt aus demselben Paragraphen, dass die elliptischen Punkte einer Fläche mit denen identisch sind, für welche das Krümmungsmass positiv ist, während die hyperbolischen einem negativen Krümmungsmass entsprechen. Sind Punkte vorhanden, für welche

$$k = 0$$

ist, so erfüllen dieselben im Allgemeinen eine Curve, welche als Wendecurve der Fläche bezeichnet wird.

§ 25.

Das Krümmungsmass hat die wichtige Eigenschaft, sich nur durch die Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G und ihre Ableitungen ausdrücken zu lassen. Doch verschieben wir den Beweis dieses Satzes, um uns vorläufig noch weiter mit der Theorie der Normalen und namentlich mit der Abbildung der Fläche auf die Gauss'sche Kugel zu beschäftigen, welche ein Hilfsmittel von hervorragender Bedeutung für flächentheoretische Untersuchungen bildet.

Es werde zuerst das Linienelement $d\sigma$ der Kugel berechnet, welches dem Element ds der Fläche entspricht. Man hat

$$d\sigma^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2. \tag{1}$$

Setzt man hier $dX = \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv$, führt für $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$ ihre Ausdrücke § 11 (10) ein und bezeichnet die Fundamentalgrössen erster Ordnung der Gauss'schen Kugel $\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2$ etc. mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, so erhält man mit Hilfe der Formeln § 15 (3, 7):

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{E} &= HL - KE \\ \mathfrak{F} &= HM - KF \\ \mathfrak{G} &= HN - KG, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

woraus

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= H(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2) - K(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2) \\ &= H\frac{ds^2}{\varrho} - Kds^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Das Quadrat des Linienelements der Gauss'schen Kugel lässt sich also als homogene lineare Function der beiden quadratischen Differentialformen ds^2 und $\frac{ds^2}{\varrho}$ darstellen. — Nimmt man den Euler'schen Satz hinzu, so stellt sich für $d\sigma^2$ die Darstellung heraus

$$d\sigma^2 = ds^2 \left(\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2^2}\right). \tag{4}$$

Was die Fundamentalgrössen 2. Ordnung betrifft, so ergeben sie sich aus der Bemerkung, dass für die Einheitskugel die Krümmungshalbmesser sämmtlicher Normalschnitte einander gleich, und zwar nach der Zeichenbestimmung des § 10 gleich — 1 sind. Hieraus folgt nämlich

$$\frac{ds^2}{\varrho} = -ds^2,$$

$$\mathfrak{L}du^2 + 2\mathfrak{M}dudv + \mathfrak{N}dv^2 = -(\mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}dudv + \mathfrak{G}dv^2),$$

mithin

$$\mathfrak{L} = -\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{M} = -\mathfrak{F}, \quad \mathfrak{N} = -\mathfrak{G}, \tag{5}$$

was leicht auch durch directe Ausrechnung bestätigt wird.

Aus (2) resultirt noch

$$\mathfrak{T}^2 = \mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = K^2 T^2,$$

$$\mathfrak{T} = \varepsilon K T, \tag{6}$$

wo εK positiv, oder

$$\mathfrak{T} T = \varepsilon (LN - M^2). \tag{7}$$

Da $LN - M^2$ (oder K) stets als von Null verschieden angenommen wird, so ist

$$\mathfrak{T} > 0.$$

Unter Umständen ist es vorteilhaft, in die flächentheoretischen Gleichungen die Grössen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ an Stelle von E, F, G einzuführen. Die Hauptformeln, welche man hierbei erhält, sollen jetzt zusammengestellt werden.

Substituirt man in (2) für H und K ihre Ausdrücke § 12 (12, 13), so ergibt sich

$$\begin{cases} \mathfrak{E} = \frac{1}{T^2}(GL^2 - 2FLM + EM^2) \\ \mathfrak{F} = \frac{1}{T^2}(GLM - F(LN + M^2) + EMN) \\ \mathfrak{G} = \frac{1}{T^2}(GM^2 - 2FMN + EN^2), \end{cases} \tag{8}$$

und die Auflösung dieser Gleichungen liefert, mit Benutzung von (6):

$$\begin{cases} E = \frac{1}{\mathfrak{T}^2}(\mathfrak{G}L^2 - 2\mathfrak{F}LM + \mathfrak{E}M^2) \\ F = \frac{1}{\mathfrak{T}^2}(\mathfrak{G}LM - \mathfrak{F}(LN + M^2) + \mathfrak{E}MN) \\ G = \frac{1}{\mathfrak{T}^2}(\mathfrak{G}M^2 - 2\mathfrak{F}MN + \mathfrak{E}N^2). \end{cases} \tag{9}$$

Für die Grössen $\eta \ldots \vartheta'$ folgt alsdann aus § 11 (9):

$$\begin{cases} \eta = \frac{LN - M^2}{\mathfrak{T}^2}(\mathfrak{F}M - \mathfrak{E}N), & \vartheta = \frac{LN - M^2}{\mathfrak{T}^2}(-\mathfrak{F}L + \mathfrak{E}M) \\ \eta' = \frac{LN - M^2}{\mathfrak{T}^2}(-\mathfrak{F}N + \mathfrak{G}M), & \vartheta' = \frac{LN - M^2}{\mathfrak{T}^2}(\mathfrak{F}M - \mathfrak{G}L), \end{cases} \tag{10}$$

mithin wird die Gleichung der Haupttangenten [§ 12 (10)]:

$$-(\mathfrak{F}L - \mathfrak{E}M)du^2 - (\mathfrak{G}L - \mathfrak{E}N)dudv + (\mathfrak{F}N - \mathfrak{G}M)dv^2 = 0, \tag{11}$$

und die Hauptkrümmungsradien bestimmen sich [§ 12 (12, 13)] aus den Formeln

(12) $$H = \frac{\mathfrak{G}L - 2\mathfrak{F}M + \mathfrak{E}N}{LN - M^2}, \quad K = \frac{\mathfrak{T}^2}{LN - M^2}$$

oder

(13) $$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{\mathfrak{G}L - 2\mathfrak{F}M + \mathfrak{E}N}{\mathfrak{T}^2}, \quad \varrho_1\varrho_2 = \frac{LN - M^2}{\mathfrak{T}^2}.$$

Der Zusammenhang zwischen Haupttangenten und Hauptkrümmungshalbmessern wird vermittelt durch

(14) $$\varrho_k = \frac{L + M\lambda_k}{\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\lambda_k} = \frac{M + N\lambda_k}{\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\lambda_k}$$

oder

(15) $$\lambda_k = -\frac{L - \mathfrak{E}\varrho_k}{M - \mathfrak{F}\varrho_k} = -\frac{M - \mathfrak{F}\varrho_k}{N - \mathfrak{G}\varrho_k}.$$

Endlich sind noch folgende Beziehungen zwischen X, Y, Z und x, y, z bemerkenswert. Bildet man Product und Quadratsumme zweier der Grössen X, Y, Z aus ihren Definitionsgleichungen (§ 8), so ergibt sich

(16) $$YZ = -\frac{1}{T^2}\left[G\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} - F\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) + E\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\right]$$

(17) $$Y^2 + Z^2 = \frac{1}{T^2}\left[G\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + E\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right].$$

Diesen Formeln lassen sich andere zuordnen, in welchen die Grössen E, F, G durch $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, und die Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial u}$ etc. durch $\frac{\partial X}{\partial u}$ etc. ersetzt sind. Es folgt nämlich mit Hilfe der Relationen § 11 (11):

(18) $$X = \frac{1}{TK}\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\right) = \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}}\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\right),$$

und hieraus:

(19) $$YZ = -\frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\mathfrak{G}\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial u} - \mathfrak{F}\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\right) + \mathfrak{E}\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial v}\right]$$

(20) $$Y^2 + Z^2 = \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\mathfrak{G}\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 - 2\mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \mathfrak{E}\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\right].$$

Wegen $\Sigma X^2 = 1$ erhält man aus (17) das Resultat, dass X sich durch E, F, G, $\frac{\partial x}{\partial u}$ und $\frac{\partial x}{\partial v}$ ausdrücken lässt, freilich in der irrationalen Form

(21) $$X = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{T^2}\left[G\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + E\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ist folgende. Ist λ der Winkel ($< \pi$), dessen Cosinus gleich X ist, so hat man

(22) $$\sin^2\lambda = \frac{1}{T^2}\left[G\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + E\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right],$$

oder, wenn man noch die Winkel, welche die positiven Richtungen

der Coordinatenlinien mit den Axen bilden, sowie den Coordinatenwinkel einführt (§ 3):

$$\sin^2\lambda \sin^2\vartheta = \cos^2\alpha' - 2\cos\vartheta\cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos^2\alpha''. \tag{23}$$

Den Formeln § 11 (7, 8) lassen sich folgende an die Seite setzen:

$$Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{1}{T}\left(M\frac{\partial x}{\partial u} - L\frac{\partial x}{\partial v}\right) \tag{24}$$

$$Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{T}\left(N\frac{\partial x}{\partial u} - M\frac{\partial x}{\partial v}\right). \tag{25}$$

Sie ergeben sich aus § 11 (10, 7, 8, 12). Wendet man weiter die Gleichungen (11) desselben Paragraphen an und recurrirt auf die Relationen § 15 (7), welche in Folge von (2) sich schreiben lassen:

$$\left\{\begin{aligned} L\eta + M\vartheta &= -T^2\mathfrak{E} \\ M\eta + N\vartheta = L\eta' + M\vartheta' &= -T^2\mathfrak{F} \\ M\eta' + N\vartheta' &= -T^2\mathfrak{G}, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

so erhält man

$$Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}}\left(-\mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{E}\frac{\partial X}{\partial v}\right) \tag{27}$$

$$Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}}\left(-\mathfrak{G}\frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial v}\right). \tag{28}$$

§ 26.

Bevor wir die Theorie der Normalen verlassen, bestimmen wir noch folgende Grössen: 1) den Winkel zweier benachbarten Normalen in den Flächenpunkten A und B; 2) Länge und Gleichungen ihres kürzesten Abstandes; 3) die Entfernung des Fusspunkts dieses Abstandes von dem zugehörigen Flächenpunkte. Die beiden Normalen haben die Richtungscosinus X, Y, Z und $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$. Ihr Winkel w oder genauer der Bogen $d\sigma$, welcher zu w in einem Kreise vom Radius 1 gehört, ist offenbar im vorigen Paragraphen bereits gegeben worden; denn er ist gleich dem, den beiden Normalen entsprechenden Linienelement der Gauss'schen Kugel. Also

$$d\sigma^2 = \sum dX^2, \tag{1}$$

wie man auch aus dem Ausdrucke von $\sin w$ und der Gleichung

$$\lim_{w=0}\frac{\sin w}{w} = 1$$

leicht schliessen könnte.

Was den kürzesten Abstand betrifft, so ist dieser für zwei beliebige Gerade

(2) $$\frac{\xi - x}{a} = \frac{\eta - y}{b} = \frac{\zeta - z}{c}$$

(3) $$\frac{\xi - x_1}{a_1} = \frac{\eta - y_1}{b_1} = \frac{\zeta - z_1}{c_1}$$

durch die Formel

(4) $$p = \frac{(bc_1 - b_1 c)(x_1 - x) + (ca_1 - c_1 a)(y_1 - y) + (ab_1 - a_1 b)(z_1 - z)}{\pm \sqrt{(bc_1 - b_1 c)^2 + (ca_1 - c_1 a)^2 + (ab_1 - a_1 b)^2}}$$

gegeben. Für unseren Fall ist

$$x_1 = x + dx, \quad a = X, \quad a_1 = X + dX \text{ etc.},$$

also

$$dp = \frac{\Sigma X(dY dz - dZ dy)}{\pm d\sigma}.$$

Bei Berechnung des Zählers erhält man nach § 11 (10):

(5) $$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\vartheta}{T}X, & \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\eta}{T}X \\ \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\vartheta'}{T}X, & \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\eta'}{T}X, \end{cases}$$

mithin

(6) $$dY dz - dZ dy = X\frac{-\vartheta du^2 - (\vartheta' - \eta)\,du\,dv + \eta' dv^2}{T},$$

und es wird

(7) $$dp = \frac{\Gamma}{\pm d\sigma},$$

wenn zur Abkürzung

(8) $$\frac{-\vartheta du^2 - (\vartheta' - \eta)\,du dv + \eta' dv^2}{T} = \Gamma$$

gesetzt wird. Aus (7) erhellt, dass $\frac{dp}{d\sigma}$ im Allgemeinen einen endlichen, von Null verschiedenen Wert hat, oder dass der Winkel und der kürzeste Abstand benachbarter Normalen im Allgemeinen unendlich kleine Grössen derselben Ordnung sind. Nur wenn $\Gamma = 0$ ist, d. h. [§ 12 (10)] wenn die beiden Nachbarpunkte auf der Fläche einer Hauptnormalebene angehören, findet dies nicht mehr statt. Doch kann man nicht ohne Weiteres schliessen, dass alsdann $dp = 0$ sei. Vielmehr bedarf der Ausdruck von dp in diesem Fall einer genaueren Untersuchung durch Hinzunahme der höheren Differentiale von X, Y, Z; diese wird später, bei den Krümmungslinien, durchgeführt werden.

Man kann den gefundenen Wert noch umgestalten, indem man Γ in anderer Weise ausdrückt. Wird die Quadratsumme der Gleichung (6) und ihrer Analogen gebildet, so ergibt sich

(9) $$\Gamma^2 = \Sigma dx^2\, \Sigma dX^2 - (\Sigma dx\, dX)^2$$

oder, nach § 25 (3), § 10 (9):

$$\Gamma^2 = ds^4\left(\frac{H}{\varrho} - K - \frac{1}{\varrho^2}\right),$$

$$\Gamma^2 = ds^4 \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2}\right), \tag{10}$$

und endlich, wenn man den Euler'schen Satz benutzt,

$$\Gamma^2 = ds^4 \cos^2\psi \sin^2\psi \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)^2. \tag{11}$$

Diese Gleichungen geben in Verbindung mit § 25 (3, 4) folgende Werte für dp:

$$dp = \pm ds \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho)(\varrho - \varrho_2)}{\varrho(\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho)}}, \tag{12}$$

$$dp = ds \frac{\cos\psi \sin\psi \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)}{\pm \sqrt{\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2^2}}}. \tag{13}$$

Wir suchen ferner die Richtungscosinus A_0, B_0, C_0 von dp auf. Da der kürzeste Abstand auf den beiden Geraden senkrecht steht, welche durch X, Y, Z und $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ gekennzeichnet werden, so hat man für eine bestimmte Richtung:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{YdZ - ZdY}{\sqrt{\Sigma(YdZ - ZdY)^2}} = \frac{YdZ - ZdY}{d\sigma}, \\ B_0 &= \frac{ZdX - XdZ}{d\sigma}, \quad C_0 = \frac{XdY - YdX}{d\sigma}. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Gleichungen der Geraden, auf welcher dp liegt, sind:

$$\xi - x_0 = RA_0, \quad \eta - y_0 = RB_0, \quad \zeta - z_0 = RC_0, \tag{15}$$

und es bezeichnen in ihnen x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines bestimmten Punktes der Geraden, R den Abstand dieses Punktes von dem variablen Punkte $(\xi\ \eta\ \zeta)$. Soll nun die gerade Linie (15) die beiden Normalen

$$\xi - x = rX, \quad \eta - y = rY, \quad \zeta - z = rZ \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \xi - (x + dx) &= r'(X + dX), \quad \eta - (y + dy) = r'(Y + dY), \\ \zeta - (z + dz) &= r'(Z + dZ) \end{aligned} \tag{17}$$

schneiden, so müssen sowol (15) und (16), als auch (15) und (17) durch je ein gemeinsames Wertsystem $(\xi\ \eta\ \zeta)$ erfüllt werden. Eliminirt man ξ, η, ζ aus beiden Gleichungssystemen und bezeichnet mit R' denjenigen Wert von R, welcher dem Schnittpunkt von (15) mit (17) zugehört, so erhält man sechs Gleichungen, welche in x_0, y_0, z_0, R, R', r, r' linear sind. Bei weiterer Elimination von x_0, y_0, z_0 bleiben drei lineare Gleichungen für $R' - R$, r, r' übrig. Löst man sie nach r auf, so ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$r = -\frac{dxdX + dydY + dzdZ}{dX^2 + dY^2 + dZ^2} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{\mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}dudv + \mathfrak{G}dv^2}. \tag{18}$$

Diese Formel liefert also den Abstand des Flächenpunktes $A \equiv (x, y, z)$ von dem Fusspunkte $A' \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ des kürzesten Abstandes zwischen der Normale AA' und einer beliebigen Nachbarnormale, welche durch das Verhältnis $\frac{dv}{du}$ besimmt wird. Setzt man für den Zähler und den Nenner ihre Werte, so wird:

$$(19) \qquad r = \frac{1}{H - K\varrho} = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho} = \frac{\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2}}{\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2^2}}.$$

Aus diesem Ausdruck, oder durch directe Untersuchung des Wertes (18) nach der Methode des § 12 erhellt, dass die Richtungen, für welche r ein Maximum oder Minimum wird, mit den Hauptkrümmungsrichtungen zusammenfallen, und dass die beiden extremen Werte von r mit ϱ_1 und ϱ_2 selbst übereinstimmen. Auch die Forderung

$$r = \varrho$$

führt, wie unmittelbar ersichtlich, wieder auf die Hauptkrümmungshalbmesser.

Wir formen noch die Werte von A_0, B_0, C_0 so um, dass die Differentiale du, dv in Evidenz treten, welche den Flächenpunkt B und damit die zweite Normale bestimmen. Dabei werden die Formeln § 25 (24, 25):

$$Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{1}{T}\left(M\frac{\partial x}{\partial u} - L\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$
$$Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{T}\left(N\frac{\partial x}{\partial u} - M\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

gebraucht; alsdann ergibt sich für $\frac{dv}{du} = \lambda$:

$$(20) \qquad A_0 = \frac{M\frac{\partial x}{\partial u} - L\frac{\partial x}{\partial v} + \left(N\frac{\partial x}{\partial u} - M\frac{\partial x}{\partial v}\right)\lambda}{\pm T\sqrt{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\lambda + \mathfrak{G}\lambda^2}}, \quad \ldots$$

Es seien A_k, B_k, C_k die Ausdrücke, in welche A_0, B_0, C_0 für $\lambda = \lambda_k$ übergehen. Will man die beiden Flächentangenten finden, welche den kürzesten Abständen (A_k, B_k, C_k) parallel laufen, so hat man nach § 4 zu setzen:

$$\frac{dx}{ds} = A_k, \qquad \frac{dy}{ds} = B_k, \qquad \frac{dz}{ds} = C_k,$$

oder, für $\frac{dv}{du} = \mu_k$:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\mu_k}{\sqrt{E + 2F\mu_k + G\mu_k^2}} = \frac{M\frac{\partial x}{\partial u} - L\frac{\partial x}{\partial v} + \left(N\frac{\partial x}{\partial u} - M\frac{\partial x}{\partial v}\right)\lambda_k}{\pm T\sqrt{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\lambda_k + \mathfrak{G}\lambda_k^2}}$$

. . . . . .

Multiplicirt man die drei Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ resp. $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ und addirt, dividirt alsdann das eine Resultat durch das andere, so folgt

$$\frac{E + F\mu_k}{F + G\mu_k} = -\frac{\vartheta + \vartheta'\lambda_k}{\eta + \eta'\lambda_k}$$

oder

$$L + M(\lambda_k + \mu_k) + N\lambda_k\mu_k = 0.$$

Diese Relation besagt nach § 21 (5), dass die beiden, durch λ_k und μ_k gekennzeichneten Tangenten einander conjugirt sind. Da nun λ_k einer Haupttangente zugeordnet ist, so muss μ_k zu der anderen Haupttangente gehören, und man erhält folgendes Resultat: Geht man von einem Flächenpunkte A in einer Hauptebene zu einem benachbarten Punkte B fort und construirt in A und B die Normalen, so liegt deren kürzester Abstand in der zweiten Hauptebene.

Wir führen noch den Winkel Ω' ein, welchen die Richtung eines beliebigen dp mit der Richtung (A_1, B_1, C_1), d. h. mit der zweiten Haupttangente bildet. Es ist

$$\cos\Omega' = A_0 A_1 + B_0 B_1 + C_0 C_1$$

und es folgt, am einfachsten aus den Ausdrücken (14):

$$\cos^2\Omega' = \frac{[\mathfrak{E} + \mathfrak{F}(\lambda + \lambda_1) + \mathfrak{G}\lambda\lambda_1]^2}{(\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\lambda + \mathfrak{G}\lambda^2)(\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\lambda_1 + \mathfrak{G}\lambda_1^2)},$$

und ferner

$$\sin^2\Omega' = \frac{[\mathfrak{E} + \mathfrak{F}(\lambda + \lambda_2) + \mathfrak{G}\lambda\lambda_2]^2}{(\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\lambda + \mathfrak{G}\lambda^2)(\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\lambda_2 + \mathfrak{G}\lambda_2^2)}.$$

Operirt man jetzt, unter Hinzunahme der Gleichungen § 25 (14), genau in der Art, wie im § 13 zur Herleitung des Euler'schen Satzes geschehen, so ergibt sich

$$r = \varrho_1 \cos^2\Omega' + \varrho_2 \sin^2\Omega'$$

oder, wenn Ω den Winkel von dp mit der ersten Haupttangente bezeichnet,

$$r = \varrho_1 \sin^2\Omega + \varrho_2 \cos^2\Omega. \tag{21}$$

Aus diesem, von Hamilton herrührenden Satze könnte ebenso wie aus dem Euler'schen eine Gruppe interessanter Folgerungen abgeleitet werden. Und weiter kann man eine Reihe eleganter Relationen unter flächentheoretischen Grössen dadurch finden, dass man zu den Ausdrücken von r und ϱ noch andere hinzunimmt, welche, wie diese, nur von ϱ_1, ϱ_2 und ψ abhängen (vgl. z. B. § 21 (8 — 11)). Doch wollen wir auf diese Beziehungen, welche aus den entsprechenden Gleichungen durch Elimination der Hauptkrümmungsradien oder des Winkels ψ folgen würden, nicht näher eingehen.

Ebenso müssen wir es uns versagen, die in den letzten Paragraphen entwickelten Resultate auch auf solche Strahlen auszudehnen, welche nicht Normalen einer Fläche sind. Es soll nur noch die Bedingung dafür aufgesucht werden, dass ein gegebenes Strahlsystem ein Normalensystem ist. Versteht man unter x_0, y_0, z_0, a, b, c Functionen zweier unabhängigen Variablen, von denen die drei letzten durch die Relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ verbunden sind, so stellen die Gleichungen

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \Big[= R$$

ein Strahlensystem dar. Wir denken uns den Variablen u, v bestimmte Werte erteilt und bilden

$$dx = dx_0 + a\,dR + R\,da$$
$$dy = dy_0 + b\,dR + R\,db$$
$$dz = dz_0 + c\,dR + R\,dc,$$

woraus

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = a\,dx_0 + b\,dy_0 + c\,dz_0 + dR.$$

Soll nun die Gerade auf einer Fläche senkrecht stehen (welche als Ort des Punktes $(x\ y\ z)$ betrachtet wird), so muss

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$$

sein, mithin wird $a\,dx_0 + b\,dy_0 + c\,dz_0$ ein vollständiges Differential, nämlich von $-R$. Die Bedingung hierfür ist

$$\frac{\partial}{\partial v} \sum a \frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \sum a \frac{\partial x_0}{\partial v}$$

oder

$$(22) \quad \frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial y_0}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{\partial z_0}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial y_0}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial z_0}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial u}.$$

Besteht umgekehrt diese Bedingungsgleichung, so lässt die Function R sich finden, und man kann die Grössen x, y, z aus den Gleichungen $x = x_0 + aR$, ... als Functionen von u und v berechnen. Ferner ist $\sum a \frac{\partial x}{\partial u} = 0$, $\sum a \frac{\partial x}{\partial v} = 0$, $\sum a^2 = 1$, und diese Gleichungen bestimmen a, b, c in der That als Richtungscosinus der Normale für die eben als existirend nachgewiesene Fläche. Die gefundene Bedingung ist hiernach für ein Normalensystem notwendig und hinreichend.

§ 27.

Wir kehren jetzt zu dem Satze vom Krümmungsmass zurück, welcher im Anfange des § 25 bereits angedeutet wurde, und beweisen ihn durch Berechnung des Zählers $(LN - M^2)$ von K.

Nach § 9 (6) in Verbindung mit § 8 (7) und den Definitionsgleichungen für A, B, C [§ 4 (4)] kann gesetzt werden:

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Die Berechnung von $LN - M^2$ soll hieraus mittels des Multiplicationstheorems der Determinanten geschehen. Es sei noch gesetzt

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = m \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = m' \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = m'' \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = n \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = n' \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = n'', \end{cases}$$

ferner

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = g \\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right)^2 = h. \end{cases}$$

Dann folgt

$$LN = \frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} g, & m, & n \\ m'', & E, & F \\ n'', & F, & G \end{vmatrix}, \quad M^2 = \frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} h, & m', & n' \\ m', & E, & F \\ n', & F, & G \end{vmatrix}.$$

Differentiirt man die Definitionsgleichungen für E, F, G nach u und v, so ergeben sich 6 Gleichungen, welche die 6 Grössen $m, \ldots n''$ bestimmen. Es wird nämlich

$$(4)\quad m = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \quad m' = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad m'' = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}$$

$$(5)\quad n = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad n' = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad n'' = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

Bei der Entwickelung der eben aufgestellten Determinanten (etwa nach den Elementen der ersten Zeile) werden demnach in $LN - M^2$ alle Glieder bis auf eines, nämlich $(g - h)(EG - F^2)$, nur von E, F, G und den Differentialquotienten dieser Grössen abhängig. Allein es kann auch $g - h$ noch durch die Ableitungen der Fundamentalgrössen erster Ordnung ausgedrückt werden, wenn man die Existenz und zum Teil auch die Stetigkeit der dritten Differentialquotienten von x, y, z nach u, v für irgendwelche Punkte der Fläche voraussetzt. Differentiirt man nämlich die erste Gleichung (2) nach v, die zweite Gleichung (2) nach u, ferner aus dem System (1) die zweite Gleichung nach v, die dritte nach u, so folgt

$$\begin{aligned} g + \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} &= \frac{\partial n}{\partial v} \\ h + \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v \partial u} &= \frac{\partial n'}{\partial u} \\ h + \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} &= \frac{\partial m'}{\partial v} \\ g + \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^3 x}{\partial v^2 \partial u} &= \frac{\partial m''}{\partial u}, \end{aligned}$$

und hieraus bei Annahme der Stetigkeit der auftretenden dritten Ableitungen, in welchem Falle die Reihenfolge der Differentiationen gleichgiltig ist,

$$g - h = \frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial n'}{\partial u} = \frac{\partial m''}{\partial u} - \frac{\partial m'}{\partial v}.$$

Benutzt man noch die Werte (4, 5), so ergibt sich übereinstimmend

$$g - h = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2},$$

und wenn die Entwickelung der vorher abgeleiteten Determinanten vollständig ausgeführt wird:

$$\begin{aligned} (6)\quad LN - M^2 = \frac{1}{4(EG - F^2)} \Big\{ & E \Big[\frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} + \Big(\frac{\partial G}{\partial u} \Big)^2 \Big] \\ & + F \Big[\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u} + 4 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial E}{\partial v} \Big] \\ & + G \Big[\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial E}{\partial u} + \Big(\frac{\partial E}{\partial v} \Big)^2 \Big] \\ & + 2(EG - F^2) \Big(2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \Big) \Big\}. \end{aligned}$$

Da das Krümmungsmass K aus (6) durch Division mit $EG - F^2$ erhalten wird, so hängt K nur von den Fundamentalgrössen erster Ordnung und den ersten und zweiten Ableitungen dieser Grössen ab.

Diese Thatsache soll als der Gauss'sche Satz bezeichnet werden. Ihre geometrische Bedeutung ergibt sich in folgender Weise.

Es sei ausser der gegebenen Fläche noch eine zweite angenommen, deren Cartesische Coordinaten ξ, η, ζ als Functionen derselben Variablen u, v gegeben sind wie x, y, z. Es sei also

$$\xi = f_1(u, v)$$
$$\eta = g_1(u, v)$$
$$\zeta = h_1(u, v).$$

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung und das Linienelement mögen für die zweite Fläche mit E_1, F_1, G_1, ds_1 bezeichnet sein, sodass

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2 F_1 du dv + G_1 dv^2.$$

Angenommen nun, die Functionen f_1, g_1, h_1 seien so beschaffen, dass für alle Wertepaare (u, v) innerhalb des betrachteten Bereiches

$$E_1 = E, \quad F_1 = F, \quad G_1 = G, \tag{7}$$

also auch

$$ds_1 = ds$$

ist. Bezeichnet man dann als entsprechende Punkte der beiden Flächen diejenigen, welche durch dasselbe Wertepaar (u, v) gegeben werden, woraus der Begriff entsprechender Curven sofort folgt, so ergibt sich, dass die Längen entsprechender Curven auf beiden Flächen einander gleich sind, oder dass sich das eine Flächenstück ohne Dehnung oder Zusammenziehung auf das andere auflegen lässt. Man sagt alsdann, die beiden Flächen seien auf einander abwickelbar. Die für die Abwickelbarkeit hinreichenden Bedingungen (7) sind auch notwendig. Denn sollen irgend zwei entsprechende Curven gleiche Längen haben, so muss $ds_1 = ds$ sein, woraus, da u und v unabhängige Variable sind, wieder die Gleichungen (7) folgen. Aus diesen Resultaten ergibt sich als geometrischer Inhalt des Gauss'schen Satzes:

Sind zwei Flächen auf einander abwickelbar, so hat das Krümmungsmass derselben in entsprechenden Punkten denselben Wert, oder auch:

Bei der Biegung einer Fläche bleibt das Krümmungsmass in jedem einzelnen Punkte ungeändert.

Nimmt man an, dass die unabhängigen Variablen für beide Flächen verschieden sind, so seien

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v) \tag{I}$$

$$\xi = \bar{f}_1(u', v'), \quad \eta = \bar{g}_1(u', v'), \quad \zeta = \bar{h}_1(u', v') \tag{II}$$

die Darstellungen der Coordinaten. Sollen die Punkte der beiden Flächen in eindeutiger Beziehung stehen, so müssen die Wertepaare

(u, v) und (u', v') einander eindeutig zugeordnet werden können; d. h. es gelten zwei functionale Beziehungen

$$u' = \varphi(u, v), \quad v' = \psi(u, v) \tag{8}$$

oder

$$u = \chi(u', v'), \quad v = \varpi(u', v') \tag{9}$$

[cf. § 5 (1, 2)]. Ferner mögen E, F, G resp. E_1', F_1', G_1' die Fundamentalgrössen erster Ordnung für die Flächen (I) und (II) bezeichnen. Um auch die zweite Fläche durch die Variablen u, v darzustellen, führen wir die Ausdrücke (8) in die Coordinaten ξ, η, ζ ein, wodurch $f_1(u', v')$ in $f_1(u, v)$, ... übergehen möge. Endlich seien E_1, F_1, G_1 die aus f_1, g_1, h_1 gebildeten Fundamentalgrössen der Fläche (II). Dann ist nach § 5 (6):

$$\begin{cases} E_1 = E_1' \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F_1' \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + G_1' \left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \\ F_1 = E_1' \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + F_1' \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + G_1' \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} \\ G_1 = E_1' \left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F_1' \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + G_1' \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2. \end{cases} \tag{10}$$

Sind nun die beiden Flächen auf einander abwickelbar, so ist $E_1 = E$, $F_1 = F$, $G_1 = G$; und umgekehrt. Demnach hat man als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Abwickelbarkeit von (II) auf (I):

$$\begin{cases} E_1' \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F_1' \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + G_1' \left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 = E \\ E_1' \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + F_1' \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + G_1' \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} = F \\ E_1' \left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F_1' \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + G_1' \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 = G. \end{cases} \tag{11}$$

Sind die Darstellungen (I) und (II) gegeben, so sind E, F, G, E_1', F_1', G_1' bekannt. Um alsdann über die Abwickelbarkeit der Flächen auf einander zu entscheiden, hat man zu untersuchen, ob zwei Functionen u', v' von u und v existiren, welche den drei Gleichungen, (11) genügen. Gibt es solche, so liefern ihre Ausdrücke: $u' = \varphi(u, v)$, $v' = \psi(u, v)$, in (II) eingesetzt, die Werte $\xi = f_1(u, v)$, $\eta = g_1(u, v)$, $\zeta = h_1(u, v)$ und stellen damit fest, welche Punkte der beiden Flächen sich gegenseitig entsprechen.

Handelt es sich darum, alle Flächen aufzusuchen, welche auf eine gegebene sich abwickeln lassen, so braucht man nicht auf die Gleichungen (11) zu recurriren, da nichts hindert, die gesuchten Flächen durch dieselben Variablen dargestellt zu denken wie die ursprüngliche. Bezeichnen wieder E, F, G die Fundamentalgrössen erster Ordnung der ursprünglichen Fläche, also gegebene Functionen von u und v,

so liegt die Aufgabe vor, die Grössen x, y, z als Functionen von u und v auf die allgemeinste Weise so zu bestimmen, dass die drei simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$(12)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = F, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G \end{cases}$$

befriedigt werden.

Wir gehen auf diese Aufgaben nicht weiter ein, leiten dagegen jetzt die Gleichung (6) noch nach einer anderen Methode ab, welche ihren eigentlichen Grund deutlicher erkennen lässt. Dieselbe wird zugleich zwei weitere Relationen unter den Fundamentalgrössen liefern.

Eine übersichtlichere Darstellung der Gauss'schen Relation (6) wird im § 67 gegeben werden.

§ 28.

Die eben bezeichnete Methode besteht einfach darin, aus den Gleichungen

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} = \frac{\partial^3 x}{\partial v \partial u^2}, \quad \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} = \frac{\partial^3 x}{\partial v^2 \partial u}$$

und den entsprechenden für y und z alle diejenigen Folgerungen abzuleiten, welche hinsichtlich der Fundamentalgrössen möglich sind. Zu diesem Zweck wollen wir zunächst Ausdrücke für die zweiten Ableitungen durch die ersten und die Fundamentalgrössen finden, was vermöge der Gleichungen § 9 (6), § 27 (1, 2, 4, 5) möglich ist. Diese Gleichungen sind, insofern sie sich auf $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ beziehen:

$$(1)\quad \begin{cases} X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = L \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = m \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = n. \end{cases}$$

Die Determinante der linken Seiten ist

$$XA + YB + ZC = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\sqrt{EG - F^2}} = \sqrt{EG - F^2},$$

und der Zähler des Ausdruckes für $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$:

$$\begin{vmatrix} L & Y & Z \\ m & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ n & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = LA + m\left(\frac{\partial y}{\partial v}Z - \frac{\partial z}{\partial v}Y\right) + n\left(\frac{\partial z}{\partial u}Y - \frac{\partial y}{\partial u}Z\right).$$

Nun war [§ 11 (7, 8)]

$$\frac{\partial z}{\partial u} Y - \frac{\partial y}{\partial u} Z = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(- F \frac{\partial x}{\partial u} + E \frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} Y - \frac{\partial y}{\partial v} Z = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(- G \frac{\partial x}{\partial u} + F \frac{\partial x}{\partial v} \right),$$

mithin wird nach Division mit $\sqrt{EG - F^2}$:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = LX + J_1 \frac{\partial x}{\partial u} + J_2 \frac{\partial x}{\partial v}, \tag{2}$$

worin

$$J_1 = \frac{Gm - Fn}{EG - F^2}, \quad J_2 = \frac{En - Fm}{EG - F^2} \tag{3}$$

gesetzt ist. Die Grössen $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ ergeben sich aus (2) durch cyklische Permutation von x, y, z, wobei die Fundamentalgrössen, also auch m und n, mithin schliesslich J_1 und J_2 ungeändert bleiben.

Demnach wird

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = LY + J_1 \frac{\partial y}{\partial u} + J_2 \frac{\partial y}{\partial v} \tag{2a}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = LZ + J_1 \frac{\partial z}{\partial u} + J_2 \frac{\partial z}{\partial v}. \tag{2b}$$

Zur Bestimmung der übrigen zweiten Ableitungen genügt es ebenfalls, in den gefundenen Werten einige einfache Vertauschungen vorzunehmen. Setzt man nämlich die Gleichungen für $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \ldots$ resp. $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \ldots$ an, so werden die Coefficienten dieser Unbekannten dieselben wie in den Gleichungen (1); die rechten Seiten L, m, n dagegen sind durch M, m', n' resp. N, m'', n'' zu ersetzen. Man erhält daher aus (2, 2a, 2b):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = MX + J_1' \frac{\partial x}{\partial u} + J_2' \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = MY + J_1' \frac{\partial y}{\partial u} + J_2' \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = MZ + J_1' \frac{\partial z}{\partial u} + J_2' \frac{\partial z}{\partial v}, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = NX + J_1'' \frac{\partial x}{\partial u} + J_2'' \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = NY + J_1'' \frac{\partial y}{\partial u} + J_2'' \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = NZ + J_1'' \frac{\partial z}{\partial u} + J_2'' \frac{\partial z}{\partial v} \end{cases} \tag{5}$$

für

$$J_1' = \frac{Gm' - Fn'}{EG - F^2}, \quad J_2' = \frac{En' - Fm'}{EG - F^2} \tag{6}$$

$$J_1'' = \frac{Gm'' - Fn''}{EG - F^2}, \quad J_2'' = \frac{En'' - Fm''}{EG - F^2}. \tag{7}$$

Nunmehr identificiren wir die beiden Werte von $\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v}$, welche sich herausstellen, wenn man die Gleichung (2) nach v, die erste Gleichung (4) nach u differentiirt. Dann ergibt sich:

$$(8)\qquad L\frac{\partial X}{\partial v} + J_1\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + J_2\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(M\frac{\partial X}{\partial u} + J_1'\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + J_2'\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)$$
$$= X\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial J_1'}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial J_2'}{\partial u} - \left(X\frac{\partial L}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial J_1}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial J_2}{\partial v}\right).$$

Hier ist die rechte Seite eine homogene lineare Function von X, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, deren Coefficienten, ebenso wie die in den bisher betrachteten Ausdrücken, nur von den Fundamentalgrössen abhängen. Die linke Seite lässt sich in eine Function derselben Art verwandeln, wenn man für $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ wieder ihre Werte aus (2, 4, 5) einführt und ferner $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$ nach § 11 (10) durch homogene lineare Functionen von $\frac{\partial x}{\partial u}$ und $\frac{\partial x}{\partial v}$ ersetzt. Nach Ausführung dieser Operationen nimmt die Gleichung (8) die Form an

$$P_0 X + P\frac{\partial x}{\partial u} + P'\frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Bevorzugt man in der ganzen Rechnung y oder z, so kommt

$$P_0 Y + P\frac{\partial y}{\partial u} + P'\frac{\partial y}{\partial v} = 0$$
$$P_0 Z + P\frac{\partial z}{\partial u} + P'\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Diese drei Gleichungen betrachten wir als homogen und linear in P_0, P und P'. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} X & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ Y & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ Z & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \sqrt{EG - F^2}$$

ist von Null verschieden; mithin müssen die Gleichungen

$$(9)\qquad P_0 = 0,\quad P = 0,\quad P' = 0$$

gelten, in welchen noch für die P ihre Werte als Functionen der Fundamentalgrössen zu setzen sind. Die Durchführung der oben angedeuteten Rechnung liefert, mit Hilfe von § 11 (13):

$$(10)\qquad P_0 = (J_1 - J_2')M + J_2 N - J_1' L + \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u}$$

$$(11)\qquad P = J_1'' J_2 - J_1' J_2' + \frac{\partial J_1}{\partial v} - \frac{\partial J_1'}{\partial u} + \frac{F}{T^2}(LN - M^2)$$

$$(12)\qquad P' = J_1 J_2' - J_1' J_2 + J_2 J_2'' - J_2'^2 + \frac{\partial J_2}{\partial v} - \frac{\partial J_2'}{\partial u} - \frac{E}{T^2}(LN - M^2).$$

Vertauscht man jetzt u mit v, d. h. bildet man die Werte $\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2}, \ldots$ aus (3) und (4), so erhält man

$$Q_0 X + Q \frac{\partial x}{\partial u} + Q' \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

und zwei analoge Gleichungen, aus welchen eine zweite Reihe von Relationen:

$$(13)\qquad Q_0 = 0, \qquad Q = 0, \qquad Q' = 0$$

folgt. Dabei ist

$$(14)\quad Q_0 = (J_2'' - J_1')M + J_1'' L - J_2' N + \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}$$

$$(15)\quad Q = J_1' J_2'' - J_1'' J_2' + J_1 J_1'' - J_1'^2 + \frac{\partial J_1''}{\partial u} - \frac{\partial J_1'}{\partial v} - \frac{G}{T^2}(LN - M^2)$$

$$(16)\quad Q' = J_1'' J_2 - J_1' J_2' + \frac{\partial J_2''}{\partial u} - \frac{\partial J_2'}{\partial v} + \frac{F}{T^2}(LN - M^2).$$

Es bestehen also zunächst sechs Gleichungen unter den Fundamentalgrössen, welche in zwei Gruppen zerfallen. Die erste Gruppe: $P_0 = 0$, $Q_0 = 0$, enthält die Differentialquotienten der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung, die andere Gruppe nur diese Grössen selbst, und zwar, da $J_1, \ldots J_2''$ nur von E, F, G abhängen, jedesmal blos in der Verbindung $LN - M^2$. Um mit den Formeln weitere Vereinfachungen vornehmen zu können, ist es nötig, die Beziehungen zwischen den Grössen $J_1 \ldots J_2''$ und den Fundamentalgrössen erster Ordnung genauer zu untersuchen. Man erhält nach (3, 6, 7), combinirt mit § 27 (4, 5):

$$(17)\qquad \begin{cases} T^2 J_1 = \frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial u} - F \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial v} \\ T^2 J_2 = E \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} E \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial u} \\ T^2 J_1' = \frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial u} \\ T^2 J_2' = \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial v} \\ T^2 J_1'' = G \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} G \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial v} \\ T^2 J_2'' = \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial v} - F \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial u}, \end{cases}$$

und umgekehrt:

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial u} = 2m = 2(EJ_1 + FJ_2), & \frac{\partial E}{\partial v} = 2m' = 2(EJ_1' + FJ_2') \\ \frac{\partial G}{\partial u} = 2n' = 2(FJ_1' + GJ_2'), & \frac{\partial G}{\partial v} = 2n'' = 2(FJ_1'' + GJ_2'') \\ \frac{\partial F}{\partial u} = m' + n = FJ_1 + GJ_2 + EJ_1' + FJ_2' \\ \frac{\partial F}{\partial v} = m'' + n' = FJ_1' + GJ_2' + EJ_1'' + FJ_2'', \end{cases}$$

$$(19)\quad \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial u} = J_1 + J_2', \qquad \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial v} = J_1' + J_2'',$$

aus welchen Gleichungen sich noch folgern lässt:

$$(20)\quad \begin{cases} \frac{\partial(EJ_1 + FJ_2)}{\partial v} - \frac{\partial(EJ_1' + FJ_2')}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial(FJ_1' + GJ_2')}{\partial v} - \frac{\partial(FJ_1'' + GJ_2'')}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial(FJ_1 + GJ_2 + EJ_1' + FJ_2')}{\partial v} - \frac{\partial(FJ_1' + GJ_2' + EJ_1'' + FJ_2'')}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial(J_1 + J_2')}{\partial v} - \frac{\partial(J_1' + J_2'')}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Subtrahirt man nun die Gleichung $Q' = 0$ von $P = 0$, um $LN - M^2$ zu eliminiren, so bleibt nach der letzten Relation (20) eine Identität, d. h. $Q' = 0$ ist von $P = 0$ abhängig. Bildet man ferner, unter der Voraussetzung $F \gtrless 0$,

$$EP + FP' = 0, \qquad FQ + GQ' = 0,$$

so findet man durch eine leichte Rechnung, bei welcher zweckmässig die beiden ersten Formeln (20) benutzt werden, dass auch diese Gleichungen identisch erfüllt sind. Die sechs Relationen unter den Fundamentalgrössen reduciren sich demnach auf drei:

$$P_0 = 0, \qquad Q_0 = 0, \qquad P = 0,$$

welche, wie leicht zu sehen, nicht mehr von einander abhängig sind. Sie sollen als die Fundamentalgleichungen bezeichnet werden. Nimmt man an Stelle von $P = 0$

$$FP + GP' = 0 \quad \text{oder} \quad EQ + FQ' = 0,$$

so erhält man die Gauss'sche Relation [§ 27 (6)] wieder. Die beiden anderen finden meist in den aus (10) und (14) hervorgehenden Formen

$$(21)\quad \frac{\partial L}{\partial v} + J_1 M + J_2 N - \left(\frac{\partial M}{\partial u} + J_1' L + J_2' M\right) = 0$$

$$(22)\quad \frac{\partial N}{\partial u} + J_1'' L + J_2'' M - \left(\frac{\partial M}{\partial v} + J_1' M + J_2' N\right) = 0$$

Anwendung. Dass sie bei einer Vertauschung von u und v in einander übergehen, wird leicht bestätigt. Denn bei dieser Veränderung vertauschen sich die beiden Grössenreihen:

$$\begin{array}{cccccccccc} E & F & m & m' & m'' & J_1 & J_1' & J_1'' & L & M \\ G & F & n'' & n' & n & J_2'' & J_2' & J_2 & N & M. \end{array}$$

Vollständig entwickelt geben die Gleichungen (20, 21):

$$(23)\quad T^2\left(\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}\right)+\frac{1}{2}L\left(F\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial E}{\partial v}\right)$$
$$+M\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}-\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial u}+F\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial F}{\partial u}\right)$$
$$+N\left(E\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}\right)=0,$$

$$(24)\quad T^2\left(\frac{\partial N}{\partial u}-\frac{\partial M}{\partial v}\right)+\frac{1}{2}N\left(F\frac{\partial E}{\partial v}-E\frac{\partial G}{\partial u}\right)$$
$$+M\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial v}+F\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial F}{\partial v}\right)$$
$$+L\left(G\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v}\right)=0.$$

Dass die vorher angewandten Schlüsse über die Abhängigkeit der vier Gleichungen der zweiten Gruppe auch für $F=0$ giltig bleiben, ergibt sich sofort, wenn man in (11, 12, 15, 16) $F=0$ substituirt. Die Gleichungen $P=0$, $Q'=0$ werden dann identisch erfüllt, und $P'=0$, $Q=0$ liefern übereinstimmend die entsprechend modificirte Gauss'sche Relation.

Es ist von Wichtigkeit, namentlich für die Theorie der Abwickelung, dass einem gegebenen System von Fundamentalgrössen E, F, G, L, M, N, welches den Fundamentalgleichungen genügt, im Allgemeinen eine und nur eine Fläche entspricht. Doch würde die Entwickelung des Beweises für diese Thatsache, welche im Folgenden nicht gebraucht wird, hier zu weit führen.

§ 29.

Durch die, in der Theorie der Flächenkrümmung auftretenden Ausdrücke $\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ etc. wird man darauf geführt, analoge Verbindungen auch dann zu bilden, wenn man zu Ableitungen höherer Ordnung der Coordinaten fortgeht. Es werde also angesetzt:

$$(1)\quad \begin{cases} X\frac{\partial^3 x}{\partial u^3}+Y\frac{\partial^3 y}{\partial u^3}+Z\frac{\partial^3 z}{\partial u^3}=a \\ X\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\partial v}+Y\frac{\partial^3 y}{\partial u^2\partial v}+Z\frac{\partial^3 z}{\partial u^2\partial v}=b \\ X\frac{\partial^3 x}{\partial u\partial v^2}+Y\frac{\partial^3 y}{\partial u\partial v^2}+Z\frac{\partial^3 z}{\partial u\partial v^2}=c \\ X\frac{\partial^3 x}{\partial v^3}+Y\frac{\partial^3 y}{\partial v^3}+Z\frac{\partial^3 z}{\partial v^3}=d. \end{cases}$$

Die durch diese Gleichungen definirten Grössen lassen sich ohne Weiteres durch die Fundamentalgrössen und deren Ableitungen ausdrücken; doch gibt die Einführung speciell von b und c ein Mittel ab, zu der zweiten und dritten Fundamentalgleichung auf einem einfacheren Wege zu gelangen als im § 28.

Differentiirt man nämlich die Definitionsgleichungen der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung:

$$\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = L, \quad \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = M, \quad \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = N$$

nach u und v, so ergibt sich:

$$(2)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\partial L}{\partial u} - \sum \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & b = \dfrac{\partial L}{\partial v} - \sum \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \\ b = \dfrac{\partial M}{\partial u} - \sum \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}, & c = \dfrac{\partial M}{\partial v} - \sum \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}, \\ c = \dfrac{\partial N}{\partial u} - \sum \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & d = \dfrac{\partial N}{\partial v} - \sum \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \end{cases}$$

oder, wenn man für $\dfrac{\partial X}{\partial u}, \ldots$ die Ausdrücke § 11 (10) einsetzt und die Gleichungen § 27 (1, 2) benutzt:

$$(3)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\partial L}{\partial u} - \dfrac{1}{T^2}(\eta m + \vartheta n) \\ b = \dfrac{\partial L}{\partial v} - \dfrac{1}{T^2}(\eta' m + \vartheta' n) = \dfrac{\partial M}{\partial u} - \dfrac{1}{T^2}(\eta m' + \vartheta n') \\ c = \dfrac{\partial M}{\partial v} - \dfrac{1}{T^2}(\eta' m' + \vartheta' n') = \dfrac{\partial N}{\partial u} - \dfrac{1}{T^2}(\eta m'' + \vartheta n'') \\ d = \dfrac{\partial N}{\partial v} - \dfrac{1}{T^2}(\eta' m'' + \vartheta' n''). \end{cases}$$

Die beiden Werte von b und c liefern nun die Relationen:

$$(4)\quad \begin{cases} T^2\dfrac{\partial L}{\partial v} - (\eta' m + \vartheta' n) = T^2\dfrac{\partial M}{\partial u} - (\eta m' + \vartheta n') \\ T^2\dfrac{\partial M}{\partial v} - (\eta' m' + \vartheta' n') = T^2\dfrac{\partial N}{\partial u} - (\eta m'' + \vartheta n''). \end{cases}$$

Nach § 11 (9), § 28 (3, 6, 7) kann man setzen

$$(5)\quad \frac{\eta m + \vartheta n}{T^2} = -(LJ_1 + MJ_2), \quad \frac{\eta' m + \vartheta' n}{T^2} = -(MJ_1 + NJ_2),$$

etc., und die beiden letzten Gleichungen gehen alsdann in der That in die Formeln § 28 (21, 22) über.

§ 30.

Die bisherigen Untersuchungen beruhten auf der Annahme, dass die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten x, y, z der Flächenpunkte

als Functionen von u und v gegeben seien. Es sollen jetzt die Hauptformeln der Krümmungstheorie auch für Ebenen- oder Tangentialcoordinaten aufgestellt werden. Dabei ist zunächst festzusetzen, welche Grössen man als Bestimmungselemente der Tangentialebenen einer Fläche betrachten will. In der Theorie der algebraischen Flächen empfiehlt es sich, die drei negativen reciproken Abschnitte der Ebene auf den Coordinatenaxen durch eine Gleichung verbunden zu denken; hier sollen, der Gauss'schen Anschauungsweise entsprechend, der Abstand W des Coordinatenanfangspunkts von der Tangentialebene und die drei Richtungscosinus von W, d. h. die Richtungscosinus der Normale, als bekannte Functionen von u und v, mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung, angesehen werden. Die Relation $\Sigma X^2 = 1$ ist dabei immer hinzuzunehmen. — Die Coefficienten $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ der Differentialform $d\sigma^2$ sind hier bekannte Functionen von u und v.

Man hat

$$W = \sum X x, \tag{1}$$

und erhält durch Differentiation dieses Ausdruckes:

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \sum x \frac{\partial X}{\partial u}, \qquad \frac{\partial W}{\partial v} = \sum x \frac{\partial X}{\partial v}. \tag{2}$$

Hieraus ergeben sich durch Auflösung nach x, y, z die Werte:

$$\begin{cases} x = WX - \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}} \frac{\partial W}{\partial u}\left(Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v}\right) + \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}} \frac{\partial W}{\partial v}\left(Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u}\right) \\ y = WY - \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}} \frac{\partial W}{\partial u}\left(Z\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial Z}{\partial v}\right) + \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}} \frac{\partial W}{\partial v}\left(Z\frac{\partial X}{\partial u} - X\frac{\partial Z}{\partial u}\right) \\ z = WZ - \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}} \frac{\partial W}{\partial u}\left(X\frac{\partial Y}{\partial v} - Y\frac{\partial X}{\partial v}\right) + \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}} \frac{\partial W}{\partial v}\left(X\frac{\partial Y}{\partial u} - Y\frac{\partial X}{\partial u}\right), \end{cases} \tag{3}$$

in welchen nach § 25 (18, 6) das Vorzeichen ε dem des Krümmungsmasses entsprechend zu wählen ist. Doch kann man die Formeln durch Hinzunahme von § 25 (27, 28) von diesem Zeichen befreien. Die Ausdrücke werden dann:

$$\begin{cases} x = WX + \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\mathfrak{G}\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} - \mathfrak{F}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right) + \mathfrak{E}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}\right] \\ y = WY + \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\mathfrak{G}\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial u} - \mathfrak{F}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right) + \mathfrak{E}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial v}\right] \\ z = WZ + \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\mathfrak{G}\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial u} - \mathfrak{F}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right) + \mathfrak{E}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial v}\right], \end{cases} \tag{4}$$

und hätten in dieser Form auch mit Hilfe der Gleichungen § 25 (19, 20) gefunden werden können.

Um die Grössen L, M, N zu bestimmen, differentiiren wir (2) noch einmal nach u und v und erhalten:

$$(5)\qquad \begin{cases} L = \sum x \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial u^2}, \quad M = \sum x \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}, \\ N = \sum x \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}. \end{cases}$$

Die zweiten Ableitungen von X lassen sich nach § 28 (2, 4, 5) als homogene lineare Functionen von X, $\frac{\partial X}{\partial u}$ und $\frac{\partial X}{\partial v}$ ausdrücken. Denn die a. a. O. aufgestellten Gleichungen gelten für jede Fläche, also auch für die Gauss'sche Kugel, bei welcher eben die Grössen x, y, z durch X, Y, Z zu ersetzen sind. Berücksichtigt man von vornherein die Gleichungen § 25 (5), so erhält man

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = -\mathfrak{E} X + \mathfrak{I}_1 \frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{I}_2 \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = -\mathfrak{F} X + \mathfrak{I}_1' \frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{I}_2' \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = -\mathfrak{G} X + \mathfrak{I}_1'' \frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{I}_2'' \frac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

und analoge Ausdrücke für $\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2}$ etc. Hierin sind die Grössen $\mathfrak{I}_1 \ldots \mathfrak{I}_2''$ genau in derselben Weise aus $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ gebildet, wie $J_1 \ldots J_2''$ aus E, F, G. Die Substitution von (6) in (5) liefert die Resultate:

$$(7)\qquad \begin{cases} L = -\mathfrak{E} W + \mathfrak{I}_1 \frac{\partial W}{\partial u} + \mathfrak{I}_2 \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \\ M = -\mathfrak{F} W + \mathfrak{I}_1' \frac{\partial W}{\partial u} + \mathfrak{I}_2' \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} \\ N = -\mathfrak{G} W + \mathfrak{I}_1'' \frac{\partial W}{\partial u} + \mathfrak{I}_2'' \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}, \end{cases}$$

und diese würden, mit § 25 (9—15) combinirt, die gesuchten Fundamentalformeln der Krümmungstheorie ergeben. Wir schreiben nur die Summe der Hauptkrümmungsradien auf, welche nach § 25 (13) wird:

$$(8)\quad \begin{aligned} \varrho_1 + \varrho_2 = &-2W + \tfrac{1}{\mathfrak{T}^2} \tfrac{\partial W}{\partial u} (\mathfrak{G}\mathfrak{I}_1 - 2\mathfrak{F}\mathfrak{I}_1' + \mathfrak{E}\mathfrak{I}_1'') \\ &+ \tfrac{1}{\mathfrak{T}^2} \tfrac{\partial W}{\partial v} (\mathfrak{G}\mathfrak{I}_2 - 2\mathfrak{F}\mathfrak{I}_2' + \mathfrak{E}\mathfrak{I}_2'') \\ &- \tfrac{1}{\mathfrak{T}^2} \left(\mathfrak{G} \tfrac{\partial^2 W}{\partial u^2} - 2\mathfrak{F} \tfrac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + \mathfrak{E} \tfrac{\partial^2 W}{\partial v^2} \right). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt eine elegante Transformation zu. Aus § 28 (18) folgt nämlich, wenn E, F, G mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, die J mit den $\mathfrak{I}$ vertauscht werden:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{T}}}{\partial v} - \dfrac{\partial \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{T}}}{\partial u} = \dfrac{1}{\mathfrak{T}}(\mathfrak{G}\mathfrak{J}_1 - 2\mathfrak{F}\mathfrak{J}_1' + \mathfrak{E}\mathfrak{J}_1'') \\ \dfrac{\partial \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{T}}}{\partial u} - \dfrac{\partial \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{T}}}{\partial v} = \dfrac{1}{\mathfrak{T}}(\mathfrak{G}\mathfrak{J}_2 - 2\mathfrak{F}\mathfrak{J}_2' + \mathfrak{E}\mathfrak{J}_2''), \end{cases}$$

mithin:

$$(10)\qquad \varrho_1 + \varrho_2 = -2W - \frac{1}{\mathfrak{T}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathfrak{G}\frac{\partial W}{\partial u} - \mathfrak{F}\frac{\partial W}{\partial v}}{\mathfrak{T}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathfrak{E}\frac{\partial W}{\partial v} - \mathfrak{F}\frac{\partial W}{\partial u}}{\mathfrak{T}}\right].$$

§ 31.

Man kann zur Theorie der Krümmung einer Curve dadurch gelangen, dass man nach der einfachsten Linie fragt, welche die Curve in einem gegebenen Punkte A berührt. Diese Linie ist, wenn von der Tangente in A abgesehen wird, der Krümmungskreis, also eine specielle Curve zweiten Grades, welche mit der gegebenen eine Berührung zweiter Ordnung hat. Will man eine derartige Untersuchung auf Flächen ausdehnen, so könnte man versucht sein, eine Kugel zu bestimmen, welche die gegebene Fläche in dem gegebenen Punkte osculirt. Die folgende Rechnung lehrt jedoch, dass eine solche Kugel nur für specielle Punkte existiren kann.

Wir definiren zunächst den Ausdruck: zwei Flächen haben in einem gegebenen Punkte eine Berührung von einer bestimmten Ordnung. Damit überhaupt eine Berührung in A stattfinde, ist erforderlich, dass die Tangentialebenen beider Flächen für diesen Punkt übereinstimmen. Jede durch die Normale hindurchgehende Ebene schneidet alsdann die Flächen in zwei entsprechenden Normalschnitten, welche einander ebenfalls berühren. Angenommen nun, die Ordnung dieser Berührung sei mindestens gleich n, welches auch die Lage der Schnittebene sei, und es sei mindestens eine solche Ebene vorhanden, für welche jene Ordnungszahl gleich (nicht grösser als) n ist, so sagen wir, die Ordnung der Berührung der Flächen sei ebenfalls $= n$. Um die Bedingungen zu finden, welche für eine Berührung n^{ter} Ordnung erfüllt sein müssen, nehmen wir die (xy)-Ebene des rechtwinkligen Coordinatensystems, auf welches die Flächen bezogen werden, parallel der gemeinsamen Tangentialebene, also die z-Axe parallel der Normale an. x, y, z seien die Coordinaten von A; $x + dx$, $y + dy$ die beiden ersten Coordinaten zweier dem A unendlich nahen Punkte A', B' der beiden Flächen, für welche die z-Coordinaten mit z_1, z_1' bezeichnet sind. Setzt man für z_1, z_1' die Entwickelbarkeit nach der Taylor'schen

Reihe bis zu den Gliedern n^{ter} Ordnung hin voraus und bezeichnet das Restglied mit R_{n+1}, so folgt

$$(1)\quad z_1 = z + p\,dx + q\,dy + \frac{1}{2}(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2) + \cdots + R_{n+1},$$

und ähnlich für die zweite Fläche

$$z_1' = z' + p'\,dx + q'\,dy + \frac{1}{2}(r'\,dx^2 + 2s'\,dx\,dy + t'\,dy^2) + \cdots + R_{n+1}'.$$

Gehören die beiden Punkte A', B' einem Normalschnitt an, welcher mit der (xz)-Ebene den Winkel ψ bildet, so ist noch

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\psi = \lambda$$

zu setzen. Soll nun $z_1 - z_1'$ eine unendlich kleine Grösse $(n+1)^{ter}$ Ordnung sein (für dx als unendlich Kleines erster Ordnung), so hat man erstens, wie bereits angenommen,

$$z' = z;$$

ferner müssen in den beiden Ausdrücken die Aggregate übereinstimmen, welche gleiche Potenzen von dx enthalten.

Dies gibt die n Gleichungen:

$$p' + q'\lambda = p + q\lambda$$
$$r' + 2s'\lambda + t'\lambda^2 = r + 2s\lambda + t\lambda^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und da diese für alle Werte von λ gelten sollen, so erhält man als notwendig und hinreichend für eine Berührung n^{ter} Ordnung die Uebereinstimmung der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^k z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \text{ und } \frac{\partial^k z'}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \quad \begin{pmatrix} \alpha + \beta = k \\ k = 1, \ldots n \end{pmatrix}$$

für das Wertsystem (xy), welches den Punkt A liefert. Soll die Berührung die n^{te} Ordnung nicht übersteigen, so dürfen ausserdem nicht sämmtliche Ableitungen der $n+1^{ten}$ Ordnung von z und z', falls diese existiren, paarweise einander gleich sein. Unwesentlich ist in der eben durchgeführten Rechnung, dass für das specielle Coordinatensystem p und q den Wert Null haben.

Die Anzahl der gefundenen Bedingungen ist

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = n'.$$

Soll nun eine Fläche m^{ter} Ordnung bestimmt werden können, welche eine gegebene Fläche in einem willkürlichen Punkte in der n^{ten} Ord-

nung berührt, so muss, wenn m' die Anzahl der verfügbaren Constanten in der Gleichung der hinzugenommenen Fläche bezeichnet,

$$n' \leqq m'$$

sein. Die Anzahl der Glieder einer vollständigen ganzen Function m^{ten} Grades von drei Variablen ist aber gleich $\binom{m+3}{3}$, mithin

$$m' = \binom{m+3}{3} - 1,$$

da die Gleichung durch eine Constante dividirt werden kann. Diese Zahl erniedrigt sich, wenn specielle Formen der Fläche m^{ter} Ordnung vorausgesetzt werden.

So enthält die allgemeine Fläche 2. Grades

$$(2)\quad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dy'z' + 2Ez'x' + 2Fx'y' + 2Gx' + 2Hy' + 2Kz' + L = 0$$

neun willkürliche Constanten, die Kugel

$$(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + (z' - \zeta)^2 = R^2$$

nur deren vier. Hieraus folgt, dass unendlich viele Kugeln existiren, welche eine Berührung erster Ordnung mit einer Fläche haben, denn eine Constante bleibt vermöge der drei Bedingungen willkürlich. Soll dagegen eine Berührung zweiter Ordnung stattfinden, welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} &x - \xi + p(z - \zeta) = 0\\ &y - \eta + q(z - \zeta) = 0\\ &1 + (z - \zeta)r + p^2 = 0\\ &1 + (z - \zeta)t + q^2 = 0\\ &(z - \zeta)s + pq = 0 \end{aligned}$$

nach sich zieht, so ist dies nur dadurch möglich, dass unter x, y, z selbst Relationen existiren. Die Elimination von $z - \zeta$ aus den drei letzten Gleichungen gibt

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2},$$

d. h. [§ 16 (10)] nur für die Nabelpunkte kann eine osculirende Kugel vorhanden sein. Dieser Umstand begründet den Ausdruck, eine Fläche sei in einem Nabelpunkte sphärisch gekrümmt.

Soll eine allgemeine Fläche 2. Grades bestimmt werden, welche eine gegebene Fläche in der 2. Ordnung berührt, so ist die Lösung dieser Aufgabe auf unendlich viele Arten möglich, da drei Constanten willkürlich bleiben. Dagegen reichen die Constanten nicht aus, um die Berührung bis zur dritten Ordnung zu erheben, denn diese würde

10 Bedingungen liefern. Eine Berührung dritter Ordnung zwischen einer Fläche 2. Grades und einer beliebigen Fläche kann also nicht in beliebigen Punkten stattfinden. Behält man die Voraussetzung bei, dass der Berührungspunkt beliebig sei, so kann man die erstgenannte Aufgabe dadurch zu einer bestimmten machen, dass man die Fläche 2. Grades specialisirt und ausserdem den Punkt dieser Fläche, in welchem die Berührung statthaben soll, besonderen Bedingungen unterwirft. So liefert die Forderung, dass die osculirende Fläche eine Rotationsfläche sei, zwei Gleichungen unter den drei noch verfügbaren Constanten; eine dritte tritt hinzu, wenn man vorschreibt, dass der Berührungspunkt dem Aequator der Rotationsfläche (welche wir als Ellipsoid oder Hyperboloid voraussetzen) angehören soll. Zwei Bedingungen würden hinzutreten, wenn ein Scheitel der Rotationsfläche als Berührungspunkt vorgeschrieben ist; eine leichte Untersuchung lehrt, dass die gesammten alsdann vorhandenen Bedingungen nur für die Kreispunkte statthaben können.

Wichtiger als diese Rotationsflächen sind die osculirenden Paraboloide, weil deren Existenz nichts anderes ist als der geometrische Ausdruck für die Annahme, dass z_1 sich nach der Taylor'schen Reihe entwickeln lässt. Dass Paraboloide existiren müssen, welche in ihrem Scheitelpunkt mit einer gegebenen Fläche in einem beliebigen Punkte eine Berührung 2. Ordnung haben, ersieht man leicht folgendermassen. Damit die Fläche (2) ein Paraboloid sei, muss die Gleichung

$$\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix} = 0$$

bestehen. Ferner werden die Coordinaten ξ, η, ζ des Scheitels S bestimmte Functionen der Constanten $A, B, \ldots$ Soll nun S mit A zusammenfallen, so treten die Gleichungen

$$\xi = x, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = z$$

hinzu, von denen die letzte bereits unter den früheren Bedingungen vorkommt. Man hat also im Ganzen 9 Bedingungen unter 9 Constanten, wodurch im Allgemeinen die Fläche 2. Grades bestimmt wird.

Specialisirt man nun das vorher angenommene Coordinatensystem noch weiter, indem man die Tangentialebene mit der (xy)-Ebene, die x- und y-Axe mit den Haupttangenten im Coordinatenanfangspunkt A zusammenfallen lässt, setzt ferner

$$dx = x_1, \qquad dy = y_1,$$

so geht nach § 16 die Gleichung (1) über in

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\varrho_1} + \frac{y_1^2}{\varrho_2}\right) + R_3,$$

welche besagt, dass das Paraboloid

$$2z_1 = \frac{x_1^2}{\varrho_1} + \frac{y_1^2}{\varrho_2}, \tag{3}$$

dessen Scheitel der Punkt A ist, in diesem Punkte die gegebene Fläche in der 2. Ordnung berührt. Je nachdem das Krümmungsmass $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ in A positiv oder negativ ist, wird das Paraboloid ein elliptisches oder ein hyperbolisches. Der Schnitt des Paraboloids mit der Ebene $z_1 = \delta$ liefert den Dupin'schen Kegelschnitt [§ 20 (1)].

Kehren wir zu der allgemeinen Aufgabe zurück. Die Lösung derselben wäre von besonderem Interesse, wenn es gelänge, sämmtliche m' Constanten der Fläche m^{ten} Grades ohne Annahme einer speciellen Gestalt dieser Fläche allein dadurch zu bestimmen, dass sie die gegebene in einem willkürlichen Punkte von einer bestimmten Ordnung berühren soll. Die ganzen Zahlen m und n müssen dann durch die Gleichung

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{4}$$

verbunden sein. Ihre Bestimmung führt also auf eine zahlentheoretische Aufgabe, für deren Lösung keine allgemeinen Methoden existiren. Die kleinsten Wertepaare, welche der Gleichung genügen, sind, abgesehen von $m = 1$, $n = 1$:

$$m = 5, \quad n = 9; \qquad m = 20, \quad n = 58.$$

Demnach gibt es in einem willkürlichen Punkte einer Fläche osculirende Flächen 5. und 20. Grades. Neuere Untersuchungen haben gezeigt, dass zwischen 21 und 675 keine Werte von m liegen können. Es sind daher einfache, d. h. geometrisch interessante Resultate auf Grund der Gleichung (4) nicht zu erwarten.

§ 32.

Im vorigen Paragraphen ist bewiesen worden, dass eine ganze Schaar von Kugeln existirt, welche in einem gegebenen Punkte einer Fläche mit dieser eine Berührung erster Ordnung haben. Sämmtliche Kugeln haben ihre Mittelpunkte auf der Normale; der Kugelradius, also der Abstand des Mittelpunktes von dem gegebenen Punkte, bleibt willkürlich. Man kann nun den Radius durch Hinzunahme der Bedingung bestimmen, dass die Kugel die Fläche nach einer beliebigen Richtung in der zweiten Ordnung berühren soll. In der That haben dann der durch die Richtung bestimmte Normalschnitt und der zu-

gehörige Hauptkreis der Kugel eine Berührung zweiter Ordnung, d. h. der Kreis ist Krümmungskreis des Normalschnitts, und die Kugel entsteht durch Rotation des Krümmungskreises um die Normale. Demnach muss auch das Problem, den Radius der in der angegebenen Weise definirten Kugel zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wieder zu den Hauptkrümmungsradien führen.

Es ist hier der Ort, noch eine besondere algebraische Fläche zu erwähnen, welche eine gegebene in einem vorgeschriebenen Punkte nach allen Richtungen in der zweiten Ordnung berührt. Sie ist der geometrische Ort sämmtlicher Krümmungskreise der Normalschnitte, welche durch den gegebenen Punkt gelegt werden können. Die Gleichungen eines solchen Krümmungskreises sind:

$$(1) \qquad (x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2+(z'-\zeta)^2=\varrho^2,$$

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x'-x & y'-y & z'-z \\ X & Y & Z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Denn die erste stellt, wenn $\xi, \eta, \zeta, \varrho$ die Bedeutungen des § 10 haben, die vorher bestimmte Kugel dar, welche den Krümmungskreis zum Hauptkreis hat, und die zweite gibt die Ebene an, welche durch die Normale des Punktes (xyz) und den unendlich nahen Punkt $(x+dx, y+dy, z+dz)$ hindurchgeht. Nun ist nach § 10 zu setzen:

$$\xi = x+\varrho X, \quad \eta = y+\varrho Y, \quad \zeta = z+\varrho Z,$$

mithin wird die Gleichung (1):

$$\Sigma(x'-x-\varrho X)^2=\varrho^2$$

oder

$$\Sigma(x'-x)^2-2\varrho\Sigma X(x'-x)=0,$$

oder endlich, wenn ϱ als Function von $\frac{dv}{du}=\lambda$ dargestellt wird [§ 9 (9)]:

$$(3) \qquad \sum(x'-x)^2-2\frac{E+2F'\lambda+G\lambda^2}{L+2M\lambda+N\lambda^2}\sum X(x'-x)=0.$$

Dividirt man die Gleichung (2) durch du, führt ebenfalls das Verhältnis λ ein, durch welches ein bestimmter Normalschnitt fixirt wird, und entwickelt die Determinante nach den Elementen der ersten Zeile, so folgt mit Berücksichtigung der Gleichungen § 11 (7, 8):

$$(4) \qquad \sum(x'-x)\left(-F'\frac{\partial x}{\partial u}+E\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \lambda\sum(x'-x)\left(-G\frac{\partial x}{\partial u}+F'\frac{\partial x}{\partial v}\right)=0.$$

Um die gesuchte Relation zu erhalten, welche für alle Punkte $(x'y'z')$ sämmtlicher Krümmungskreise gilt, hat man λ aus (3) und (4) zu

eliminiren. An dem Grade der Resultante in x', y', z' erkennt man, dass die gesuchte Fläche eine specielle Fläche 4. Grades ist.

Um die Fläche discutiren zu können, was jedoch hier nicht geschehen soll, reicht es aus, ihre Gleichung für das specielle Coordinatensystem herzustellen, in welchem die (xy)-Ebene mit der Tangentialebene, die beiden anderen Ebenen mit den Hauptnormalebenen zusammenfallen. Nach § 16 wird dann $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $L = r = \frac{1}{\varrho_1}$, $M = 0$, $N = t = \frac{1}{\varrho_2}$, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$, und von den partiellen Ableitungen der Coordinaten bleiben nur

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} = 1$$

übrig. Die Gleichungen (3, 4) gehen also über in

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\lambda^2\right)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2(1 + \lambda^2)z' = 0 \tag{5}$$

$$y' - \lambda x' = 0, \tag{6}$$

und die Gleichung der Fläche wird:

$$\left(\frac{x'^2}{\varrho_1} + \frac{y'^2}{\varrho_2}\right)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2(x'^2 + y'^2)z' = 0. \tag{7}$$

§ 33.

In jedem Punkte einer Fläche existirt mindestens ein Normalschnitt, welcher von dem zugehörigen Krümmungskreise in der dritten Ordnung berührt wird, oder, in der Ausdrucksweise der Differentialrechnung, mit diesem vier aufeinanderfolgende Punkte gemein hat. Zu diesen Normalschnitten, deren Untersuchung die Einführung der Differentialquotienten dritter Ordnung der Coordinaten nötig macht, gelangt man auf folgende Weise.

Es sei ϱ der Krümmungshalbmesser eines durch das Verhältnis $\lambda = \frac{dv}{du}$ charakterisirten Normalschnitts im Punkte $A = (u, v)$, also nach § 9 (9):

$$\varrho = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}.$$

Für den Punkt $B = (u + du, v + dv)$ sei $\varrho + \delta\varrho$ der Krümmungsradius ebendesselben Schnittes. Soll der Krümmungskreis in B derselbe sein wie in A, so muss $\delta\varrho = 0$ oder $\delta\frac{1}{\varrho} = 0$ gesetzt werden. Nun ist für

$$\frac{du}{ds} = U, \quad \frac{dv}{ds} = V:$$

$$\frac{1}{\varrho} = LU^2 + 2MUV + NV^2,$$

mithin die Bedingungsgleichung für die aufgestellte Forderung:

$$(1)\qquad U^2dL + 2UVdM + V^2dN + 2[LUdU + M(UdV + VdU) + NVdV] = 0$$

Hierin ist

$$(2)\qquad dL = \frac{\partial L}{\partial u}du + \frac{\partial L}{\partial v}dv = \left(\frac{\partial L}{\partial u}U + \frac{\partial L}{\partial v}V\right)ds, \text{ etc.}$$

und die Differentiale dU, dV sind aus den für U und V geltenden Gleichungen

$$(3)\qquad \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}U + \frac{\partial x}{\partial v}V, \text{ etc.}$$

durch Differentiation zu berechnen. Die linken Seiten von (3) sind die Richtungscosinus der von A nach B gerichteten Tangente der Fläche, und ihre Differentiale $d\frac{dx}{ds}$ etc. die Incremente dieser Richtungscosinus beim Uebergange von AB zu einer benachbarten Tangente BC. Dabei ist für unseren Fall zu beachten, dass C, ebenso wie B, dem vorher fixirten Normalschnitt angehört; und dass es daher möglich sein muss, die genannten Differentiale, wenigstens ihren Verhältnissen nach, durch Grössen auszudrücken, welche nur von A und λ abhängen.

Nun sind nach den Frenet'schen Formeln für eine beliebige Curve die Grössen $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$ gleich den Richtungscosinus der Hauptnormale in A, multiplicirt mit dem Contingenzwinkel $d\omega$. Für unseren ebenen Schnitt fällt diese Hauptnormale mit der Flächennormale zusammen. Ersetzt man noch $d\omega$ durch $\frac{ds}{\varrho}$, so wird

$$(4)\qquad d\frac{dx}{ds} = X\frac{ds}{\varrho},\quad d\frac{dy}{ds} = Y\frac{ds}{\varrho},\quad d\frac{dz}{ds} = Z\frac{ds}{\varrho},$$

und die Differentiation von (3) ergibt:

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}dU + \frac{\partial x}{\partial v}dV = \left(\frac{X}{\varrho} - \alpha\right)ds \\ \frac{\partial y}{\partial u}dU + \frac{\partial y}{\partial v}dV = \left(\frac{Y}{\varrho} - \beta\right)ds \\ \frac{\partial z}{\partial u}dU + \frac{\partial z}{\partial v}dV = \left(\frac{Z}{\varrho} - \gamma\right)ds, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}U^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}UV + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}V^2 = \alpha$$

gesetzt ist, und β, γ durch Vertauschung von x mit y und z aus α hervorgehen. Multiplicirt man jetzt die Gleichungen (5) mit $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$,

$\frac{\partial z}{\partial u}$ resp. $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ und addirt, löst dann die entstehenden Formeln nach dU und dV auf, so folgt:

$$T^2 dU = \left(F \sum \alpha \frac{\partial x}{\partial v} - G \sum \alpha \frac{\partial x}{\partial u}\right) ds$$
$$T^2 dV = \left(-E \sum \alpha \frac{\partial x}{\partial v} + F \sum \alpha \frac{\partial x}{\partial u}\right) ds.$$

Zum Einsetzen in (1) werden die Verbindungen gebraucht:

$$L dU + M dV = \frac{ds}{T^2}\left(\eta \sum \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \vartheta \sum \alpha \frac{\partial x}{\partial v}\right)$$
$$M dU + N dV = \frac{ds}{T^2}\left(\eta' \sum \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \vartheta' \sum \alpha \frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

welche nach § 11 (10) auch geschrieben werden können:

$$L dU + M dV = ds \sum \alpha \frac{\partial X}{\partial u}$$
$$M dU + N dV = ds \sum \alpha \frac{\partial X}{\partial v},$$

oder, wenn für α, β, γ ihre Werte gesetzt werden:

$$L dU + M dV = ds\left(U^2 \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2UV \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + V^2 \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)$$
$$M dU + N dV = ds\left(U^2 \sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2UV \sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + V^2 \sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right).$$

Substituirt man diese Ausdrücke, sowie die von dL, dM, dN in (1), so wird die ganze Gleichung durch ds teilbar. Wir setzen nun zur Abkürzung

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u} + 2\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = L', & \frac{\partial L}{\partial v} + 2\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = L'', \\ \frac{\partial M}{\partial u} + 2\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = M', & \frac{\partial M}{\partial v} + 2\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = M'', \\ \frac{\partial N}{\partial u} + 2\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = N', & \frac{\partial N}{\partial v} + 2\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = N'', \end{cases}$$

ferner bleibend

$$(7)\quad L' = P,\quad L'' + 2M' = 3Q,\quad N' + 2M'' = 3R,\quad N'' = S,$$

und multipliciren die erhaltene Gleichung mit ds^3: dann ergibt sich

$$(8)\qquad P du^3 + 3Q du^2 dv + 3R du dv^2 + L dv^3 = 0,$$

eine cubische Gleichung für λ, welche demnach, wie vorher behauptet, mindestens einen reellen Normalschnitt liefert, der von einem Kreise „superosculirt" wird. Die in (8) auftretenden, durch (6) und (7) be-

stimmten Coefficienten P, Q, R, S sollen als Fundamentalgrössen dritter Ordnung der Fläche bezeichnet werden.

Aus der eben durchgeführten Rechnung folgt, dass

$$Pdu^3 + 3Qdu^2dv + 3Rdudv^2 + Sdv^3 = ds^2\delta\frac{1}{\varrho} \tag{9}$$

ist.

Für die Grössen $L', \ldots N''$ können noch andere Ausdrücke aufgestellt werden, wenn man entweder die im § 29 definirten Grössen a, b, c, d einführt oder nur die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung und ihre Ableitungen beibehält. Im ersten Fall ergibt sich nach § 29 (2):

$$\begin{cases} L' = 3\frac{\partial L}{\partial u} - 2a, & L'' = 3\frac{\partial L}{\partial v} - 2b \\ M' = 3\frac{\partial M}{\partial u} - 2b, & M'' = 3\frac{\partial M}{\partial v} - 2c \\ N' = 3\frac{\partial N}{\partial u} - 2c, & N'' = 3\frac{\partial N}{\partial v} - 2d. \end{cases} \tag{10}$$

Um die zweite Forderung zu erfüllen, hat man für $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$ wieder die linearen Functionen von $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ einzusetzen [§ 11 (10)], welche in der vorhergehenden Rechnung ursprünglich vorkamen, und die Definitionen § 27 (1, 2) zu benutzen; oder, was dasselbe ist, man hat für $a \ldots d$ die Werte § 29 (3) zu nehmen. Dann wird erhalten:

$$\begin{cases} L' = \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{2}{T^2}(\eta m + \vartheta n), & L'' = \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{2}{T^2}(\eta' m + \vartheta' n) \\ M' = \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{2}{T^2}(\eta m' + \vartheta n'), & M'' = \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{2}{T^2}(\eta' m' + \vartheta' n') \\ N' = \frac{\partial N}{\partial u} + \frac{2}{T^2}(\eta m'' + \vartheta n''), & N'' = \frac{\partial N}{\partial v} + \frac{2}{T^2}(\eta' m'' + \vartheta' n''), \end{cases} \tag{11}$$

in welchen Gleichungen noch $\eta \ldots \vartheta'$, $m \ldots n''$ durch § 11 (9), § 27 (4, 5) bestimmt werden.

Für die Fundamentalgrössen dritter Ordnung ergeben sich aus (7) und (10) die Ausdrücke

$$\begin{cases} P = 3\frac{\partial L}{\partial u} - 2a \\ Q = \frac{\partial L}{\partial v} + 2\frac{\partial M}{\partial u} - 2b \\ R = \frac{\partial N}{\partial u} + 2\frac{\partial M}{\partial v} - 2c \\ S = 3\frac{\partial N}{\partial v} - 2d, \end{cases} \tag{12}$$

welche ebenfalls mit Hilfe von § 29 (3) noch in anderer Form dargestellt werden können:

$$(13)\qquad \begin{cases} P = \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{2}{T^2}(\eta m + \vartheta n) \\ Q = \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{2}{T^2}(\eta m' + \vartheta n') \\ R = \frac{\partial N}{\partial u} + \frac{2}{T^2}(\eta' m' + \vartheta' n') \\ S = \frac{\partial N}{\partial v} + \frac{2}{T^2}(\eta' m'' + \vartheta' n''). \end{cases}$$

Führt man endlich die Grössen J (§ 28) ein, so kann man schreiben:

$$(14)\qquad \begin{cases} P = \frac{\partial L}{\partial u} - 2(LJ_1 + MJ_2) \\ Q = \frac{\partial L}{\partial v} - 2(LJ_1' + MJ_2') \\ R = \frac{\partial N}{\partial u} - 2(MJ_1' + NJ_2') \\ S = \frac{\partial N}{\partial v} - 2(MJ_1'' + NJ_2''). \end{cases}$$

§ 34.

Es sollen noch Beziehungen hergestellt werden zwischen den Fundamentalgrössen dritter Ordnung und den Ableitungen der Grössen H und K, durch welche die Summe und das Product der Hauptkrümmungen bestimmt wird. Aus den Gleichungen § 12 (12, 13)

$$\frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} = H, \qquad \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K$$

folgt bei Einführung der Grössen $m \ldots n''$ [§ 27 (4, 5)]:

$$\begin{aligned} T^2\frac{\partial H}{\partial u} &= G\frac{\partial L}{\partial u} - 2F\frac{\partial M}{\partial u} + E\frac{\partial N}{\partial u} + 2(L - EH)n' \\ &\quad - 2(M - FH)(n + m') + 2(N - GH)m \\ T^2\frac{\partial H}{\partial v} &= G\frac{\partial L}{\partial v} - 2F\frac{\partial M}{\partial v} + E\frac{\partial N}{\partial v} + 2(L - EH)n'' \\ &\quad - 2(M - FH)(n' + m'') + 2(N - GH)m' \\ T^2\frac{\partial K}{\partial u} &= N\frac{\partial L}{\partial u} - 2M\frac{\partial M}{\partial u} + L\frac{\partial N}{\partial u} - 2K[En' - F(n + m') + Gm] \\ T^2\frac{\partial K}{\partial v} &= N\frac{\partial L}{\partial v} - 2M\frac{\partial M}{\partial v} + L\frac{\partial N}{\partial v} - 2K[En'' - F(n' + m'') + Gm'], \end{aligned}$$

oder, wenn noch die Grössen $J_1 \ldots J_2''$ aus § 28 (3, 6, 7) eingesetzt werden:

$$(1)\quad \begin{cases} T^2\dfrac{\partial H}{\partial u} = G\dfrac{\partial L}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial M}{\partial u} + E\dfrac{\partial N}{\partial u} + 2(\eta J_1 + \vartheta J_1') \\ \qquad\qquad + 2(\eta' J_2 + \vartheta' J_2') \\ T^2\dfrac{\partial H}{\partial v} = G\dfrac{\partial L}{\partial v} - 2F\dfrac{\partial M}{\partial v} + E\dfrac{\partial N}{\partial v} + 2(\eta J_1' + \vartheta J_1'') \\ \qquad\qquad + 2(\eta' J_2' + \vartheta' J_2'') \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} T^2\dfrac{\partial K}{\partial u} = N\dfrac{\partial L}{\partial u} - 2M\dfrac{\partial M}{\partial u} + L\dfrac{\partial N}{\partial u} - 2KT^2(J_1 + J_2') \\ T^2\dfrac{\partial K}{\partial v} = N\dfrac{\partial L}{\partial v} - 2M\dfrac{\partial M}{\partial v} + L\dfrac{\partial N}{\partial v} - 2KT^2(J_1' + J_2''). \end{cases}$$

Löst man ferner die Gleichungen § 33 (14) nach den Ableitungen $\frac{\partial L}{\partial u}, \ldots \frac{\partial N}{\partial v}$ auf, so erhält man:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u} = P + 2(LJ_1 + MJ_2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial v} = Q + 2(LJ_1' + MJ_2') \\ \dfrac{\partial N}{\partial u} = R + 2(MJ_1' + NJ_2') \\ \dfrac{\partial N}{\partial v} = S + 2(MJ_1'' + NJ_2''). \end{cases}$$

Endlich ergeben sich aus den Relationen $P_0 = 0$, $Q_0 = 0$ [cf. § 28 (10, 14)] mit Benutzung von (3) die Ausdrücke:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial u} = Q + LJ_1' + M(J_2' + J_1) + NJ_2 \\ \dfrac{\partial M}{\partial v} = R + LJ_1'' + M(J_2'' + J_1') + NJ_2'. \end{cases}$$

Werden nun die Werte (3, 4) in (1, 2) substituirt, so treten, wie man leicht bemerkt, beträchtliche Reductionen ein, und es bleibt:

$$(5)\quad \begin{cases} GP - 2FQ + ER = T^2\dfrac{\partial H}{\partial u} \\ GQ - 2FR + ES = T^2\dfrac{\partial H}{\partial v} \\ NP - 2MQ + LR = T^2\dfrac{\partial K}{\partial u} \\ NQ - 2MR + LS = T^2\dfrac{\partial K}{\partial v}. \end{cases}$$

§ 35.

Die eben eingeführten Ableitungen von H und K treten bei der Untersuchung der Veränderungen auf, welche irgendwelche Functionen der Hauptkrümmungsradien beim Uebergange von einem gegebenen

Flächenpunkte zu einem unendlich nahen erleiden. Diese Aenderungen wollen wir speciell für die Hauptkrümmungen bestimmen. Aus der für sie geltenden Gleichung

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 - H\frac{1}{\varrho} + K = 0$$

ergibt sich

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{2}\left(H \pm \sqrt{H^2 - 4K}\right). \tag{1}$$

mithin

$$2d\frac{1}{\varrho_k} = dH \pm \frac{HdH - 2dK}{\sqrt{H^2 - 4K}},$$

und durch Multiplication beider Werte:

$$4d\frac{1}{\varrho_1}d\frac{1}{\varrho_2} = dH^2 - \frac{(HdH - 2dK)^2}{H^2 - 4K},$$

$$(H^2 - 4K)d\frac{1}{\varrho_1}d\frac{1}{\varrho_2} = -KdH^2 + HdHdK - dK^2$$

$$\begin{aligned}(2)\quad (H^2 - 4K)d\frac{1}{\varrho_1}d\frac{1}{\varrho_2} = &\left[-K\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 + H\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial u} - \left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2\right]du^2\\ &+\left[-2K\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v} + H\left(\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial K}{\partial u}\right) - 2\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v}\right]du\,dv\\ &+\left[-K\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2 + H\frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial K}{\partial v} - \left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2\right]dv^2.\end{aligned}$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck. Wird er gleich Null gesetzt, so resultirt eine quadratische Gleichung für $\frac{dv}{du} = \lambda$, welche demnach zwei Normalschnitte bestimmt. Schreitet man in der Ebene eines solchen vom gegebenen Punkte aus unendlich wenig fort, so gelangt man zu einem Punkte, in welchem ein Hauptkrümmungsradius der Fläche denselben Wert hat wie im Ausgangspunkte.

Es sollen jetzt in (2) mit Hilfe von § 34 (5) für $\frac{\partial H}{\partial u}, \ldots$ die Grössen P, Q, R, S eingeführt werden. Nach § 11 (9) ergibt sich leicht:

$$\begin{aligned}&-K\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 + H\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial u} - \left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2\\ &= \frac{1}{T^6}\left\{[\eta' P + (\vartheta' - \eta)Q - \vartheta R]^2 + [(\vartheta' - \eta)^2 + 4\eta'\vartheta](PR - Q^2)\right\},\end{aligned}$$

und durch Vertauschung von u mit v, bei welcher die beiden Grössenreihen

$$\begin{array}{cccc}\eta & \vartheta & P & Q\\ \vartheta' & \eta' & S & R\end{array}$$

in einander übergehen:

$$-K\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2+H\frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial K}{\partial v}-\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2$$
$$=\frac{1}{T^6}\left\{[\eta' Q+(\vartheta'-\eta)R-\vartheta S]^2+[(\vartheta'-\eta)^2+4\eta'\vartheta](QS-R^2)\right\}.$$

Endlich ist

$$-2K\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v}+H\left(\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v}+\frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial K}{\partial u}\right)-2\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v}$$
$$=\frac{1}{T^6}\Big\{2[\eta' P+(\vartheta'-\eta)Q-\vartheta R][\eta' Q+(\vartheta'-\eta)R-\vartheta S]$$
$$+[(\vartheta'-\eta)^2+4\eta'\vartheta](PS-QR)\Big\}.$$

Werden diese Werte in (2) eingesetzt und die Gleichung [§ 12 (15)]

$$(\vartheta'-\eta)^2+4\eta'\vartheta=T^4(H^2-4K)$$

berücksichtigt, so folgt:

$$(3)\quad (H^2-4K)\,d\frac{1}{\varrho_1}\cdot d\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{T^6}\Big\{[\eta' P+(\vartheta'-\eta)Q-\vartheta R]\,du$$
$$+[\eta' Q+(\vartheta'-\eta)R-\vartheta S]\,dv\Big\}^2$$
$$+\frac{1}{T^4}(H^2-4K)[(PR-Q^2)du^2+(PS-QR)dudv+(QS-R^2)dv^2].$$

§ 36.

Zum Schlusse dieses Abschnittes wollen wir noch die Formeln des § 16 vervollständigen, indem wir die Werte von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $m\ldots n''$ etc. für Cartesische Coordinaten, d. h. für die Flächendarstellung $z=\varphi(x,y)$ angeben.

Aus § 16 (8) folgt

$$(1)\qquad H=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(2)\qquad K=\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2},$$

mithin ist nach § 25 (2), § 16 (1, 3):

$$(3)\qquad \begin{cases}\mathfrak{E}=\dfrac{(1+q^2)r^2-2pqrs+(1+p^2)s^2}{(p^2+q^2+1)^2}\\ \mathfrak{F}=\dfrac{(1+q^2)rs-pq(rt+s^2)+(1+p^2)st}{(p^2+q^2+1)^2}\\ \mathfrak{G}=\dfrac{(1+q^2)s^2-2pqst+(1+p^2)t^2}{(p^2+q^2+1)^2}.\end{cases}$$

Aus § 27 (4, 5) ergibt sich

$$(4)\qquad m=pr,\quad m'=ps,\quad m''=pt,$$
$$(5)\qquad n=qr,\quad n'=qs,\quad n''=qt,$$

und hiernach weiter aus § 28 (3, 6, 7):

$$(6)\qquad J_1 = \frac{pr}{p^2+q^2+1},\quad J_1' = \frac{ps}{p^2+q^2+1},\quad J_1'' = \frac{pt}{p^2+q^2+1},$$

$$(7)\qquad J_2 = \frac{qr}{p^2+q^2+1},\quad J_2' = \frac{qs}{p^2+q^2+1},\quad J_2'' = \frac{qt}{p^2+q^2+1},$$

Endlich werden die Fundamentalgrössen 3. Ordnung (§ 33), wenn

$$(8)\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = z_{30},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = z_{21},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = z_{12},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = z_{03}$$

gesetzt wird:

$$(9)\qquad \begin{cases} P = \dfrac{(p^2+q^2+1)z_{30} - 3r(pr+qs)}{(p^2+q^2+1)^{\frac{5}{2}}} \\ Q = \dfrac{(p^2+q^2+1)z_{21} - r(ps+qt) - 2s(pr+qs)}{(p^2+q^2+1)^{\frac{5}{2}}} \\ R = \dfrac{(p^2+q^2+1)z_{12} - t(pr+qs) - 2s(ps+qt)}{(p^2+q^2+1)^{\frac{5}{2}}} \\ S = \dfrac{(p^2+q^2+1)z_{03} - 3t(ps+qt)}{(p^2+q^2+1)^{\frac{5}{2}}}. \end{cases}$$

II. Abschnitt.

Besondere Curven und Coordinatensysteme auf einer Fläche.

§ 37.

Die Lösung flächentheoretischer Aufgaben kann häufig dadurch erleichtert werden, dass man das System krummliniger Coordinaten, auf welches die Punkte der Fläche bezogen sind, in passender Weise specialisirt. In erster Linie bietet sich hier die Annahme dar, dass die Coordinatenlinien sich überall unter rechten Winkeln schneiden. Alsdann besteht, wie bereits im § 3 nachgewiesen, für die ganze Ausdehnung der betrachteten Fläche die Bedingung

$$F = 0.$$

Führt man sie in die Formeln § 27 (4, 5), § 28 (3, 6, 7) ein, so ergibt sich

$$(1)\qquad m' + n = 0,\qquad m'' + n' = 0,$$

$$(2)\qquad \begin{cases} J_1 = \dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial E}{\partial u},\quad J_1' = \dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial E}{\partial v},\quad J_1'' = \dfrac{-1}{2E}\dfrac{\partial G}{\partial u}, \\ J_2 = \dfrac{-1}{2G}\dfrac{\partial E}{\partial v},\quad J_2' = \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial u},\quad J_2'' = \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial v}. \end{cases}$$

Die Gauss'sche Relation unter den Fundamentalgrössen wird nach § 27 (6):

$$(3)\quad LN - M^2 = \frac{1}{4G}\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right] + \frac{1}{4E}\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right),$$

während die beiden andern Fundamentalgleichungen [§ 28 (21, 22)] keine beträchtlichen Vereinfachungen erfahren. — Die Grössen $\eta \ldots \vartheta'$ erhalten die Werte

$$(4)\quad \eta = -GL,\quad \vartheta = -EM,\quad \eta' = -GM,\quad \vartheta' = -EN,$$

sodass nach § 11 (10) die Gleichungen gelten:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = -\dfrac{L}{E}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{M}{G}\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = -\dfrac{M}{E}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{N}{G}\dfrac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

Die elementaren symmetrischen Functionen der Hauptkrümmungen sind [§ 12 (12, 13)]:

$$(6)\quad H = \frac{L}{E} + \frac{N}{G}$$

$$(7)\quad K = \frac{LN - M^2}{EG},$$

und die quadratische Gleichung selbst, welcher die Hauptkrümmungsradien genügen, hat die Form

$$(8)\quad \left(\frac{E}{\varrho} - L\right)\left(\frac{G}{\varrho} - N\right) - M^2 = 0$$

oder

$$(LN - M^2)\varrho^2 - (GL + EN)\varrho + EG = 0.$$

Endlich wird die Gleichung der Haupttangenten:

$$(9)\quad EMdu^2 + (EN - GL)\,du\,dv - GMdv^2 = 0.$$

Soll eine Fläche, deren Cartesische Coordinaten ursprünglich durch beliebige Variable u, v dargestellt sind, auf orthogonale Parameter u', v' bezogen werden, so kann man die eine Schaar der neuen Coordinatenlinien:

$$(10)\quad u' = \varphi(u, v) = \text{const.}$$

willkürlich annehmen. Die Schaar der orthogonalen Trajectorien wird dann durch $F' = 0$ oder, nach § 5 (12), durch die partielle Differentialgleichung

$$E\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial v} - F\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right) + G\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial u} = 0$$

bestimmt. Die Integration dieser linearen homogenen Gleichung:

(11) $$\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial v'}{\partial u} + \left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial v'}{\partial v} = 0$$

erfordert die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen u und v:

(12) $$\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du - \left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Ist

$$\psi(u, v) = \text{const.}$$

das Integral der letzteren, so hat man

$$v' = \psi(u, v)$$

oder gleich einer willkürlichen Function von ψ zu setzen. — Falls die gegebene Curvenschaar nicht in der Form (10) dargestellt, sondern durch eine Differentialgleichung

$$U(u, v)\,du + V(u, v)\,dv = 0$$

definirt ist, so hat man für μ als integrirenden Factor dieser Gleichung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \mu U, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \mu V,$$

und (12) transformirt sich in:

(13) $$(EV - FU)\,du + (FV - GU)\,dv = 0,$$

was auch, für $\cos w = 0$, $\frac{\delta v}{\delta u} = -\frac{U}{V}$, aus § 4 (6) hätte geschlossen werden können.

§ 38.

Es seien zweitens die Coordinatenlinien so gewählt, dass in jedem Punkte der Fläche ihre Tangenten einander conjugirt sind. Dann gilt nach § 21 die Bedingungsgleichung

$$M = 0.$$

Was nun zunächst die Aufgabe betrifft, zu einer willkürlichen Curvenschaar die conjugirte zu finden, so hängt auch diese von der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades ab, welche sich schreiben lässt:

(1) $$\left(L\frac{\partial\varphi}{\partial v} - M\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \left(M\frac{\partial\varphi}{\partial v} - N\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv = 0$$

oder

(2) $$(LV - MU)\,du + (MV - NU)\,dv = 0,$$

je nach der Form, in welcher die gegebene Schaar dargestellt ist Dies folgt aus § 21 (5).

Setzt man in die wichtigsten Ausdrücke und Formeln der Flächen-

theorie $M = 0$ ein, so vereinfachen sich vor allem die zweite und dritte Fundamentalgleichung, welche werden:

$$(3) \qquad \frac{\partial L}{\partial v} - J_1' L + J_2 N = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial u} - J_2' N + J_1'' L = 0.$$

Die Grössen J haben hierin ihre allgemeinen Werte, wie sie im § 28 gegeben wurden. Ferner ergibt sich:

$$(4) \qquad \eta = -GL, \quad \vartheta = FL, \quad \eta' = FN, \quad \vartheta' = -EN,$$

mithin

$$(5) \qquad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{L}{T^2}\left(-G\frac{\partial x}{\partial u} + F\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{N}{T^2}\left(\quad F\frac{\partial x}{\partial u} - E\frac{\partial x}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Die Bestimmungsgleichungen der Haupttangenten und der Hauptkrümmungsradien erhalten die Form:

$$(6) \qquad -FL du^2 + (EN - GL) du\, dv + FN dv^2 = 0,$$

$$(7) \qquad LN\varrho^2 - (GL + EN)\varrho + EG - F^2 = 0.$$

Bemerkenswert ist hier die Gleichung

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 \chi}{\partial u\, \partial v} - J_1' \frac{\partial \chi}{\partial u} - J_2' \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0,$$

welche nach § 28 (4) durch $\chi = x, y, z$ befriedigt wird. Es genügen also, wenn die Coordinatenlinien conjugirt sind, die drei Cartesischen Coordinaten einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Endlich werden die Grössen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ [§ 25 (8)], sowie die Fundamentalgrössen dritter Ordnung [§ 33 (14)] durch folgende Ausdrücke definirt:

$$(9) \qquad \mathfrak{E} = \frac{GL^2}{T^2}, \quad \mathfrak{F} = \frac{-FLN}{T^2}, \quad \mathfrak{G} = \frac{EN^2}{T^2};$$

$$(10) \qquad \begin{cases} P = \frac{\partial L}{\partial u} - 2LJ_1, \\ Q = \frac{\partial L}{\partial v} - 2LJ_1' = -LJ_1' - NJ_2, \\ R = \frac{\partial N}{\partial u} - 2NJ_2' = -LJ_1'' - NJ_2', \\ S = \frac{\partial N}{\partial v} - 2NJ_2''. \end{cases}$$

§ 39.

Unter den Curvensystemen, als deren Ort eine Fläche betrachtet werden kann, sind die im § 23 bereits erwähnten Haupttangentencurven, deren Gleichung $\Gamma = 0$ ist, von besonderer Wichtigkeit. Sie

können nach § 26 auch durch die Forderung definirt werden, dass der kürzeste Abstand benachbarter Normalen längs einer solchen Curve ein Unendlichkleines höherer Ordnung sein solle. Es handelt sich jetzt zunächst darum, diesen Abstand genauer zu untersuchen als dort geschehen ist. Wir gehen dabei auf seinen allgemeinen Ausdruck zurück, wie er für zwei beliebige Gerade

$$\frac{\xi - x}{a} = \frac{\eta - y}{b} = \frac{\zeta - z}{c} \tag{1}$$

$$\frac{\xi - x_1}{a_1} = \frac{\eta - y_1}{b_1} = \frac{\zeta - z_1}{c_1} \tag{2}$$

durch die Formel § 26 (4) gegeben wird. Ferner betrachten wir die Gerade (1) als einer Schaar angehörig; dann bedeuten x, y, z, a, b, c Functionen eines Parameters t. Derselben Schaar soll die Gerade (2) zugehören, und zwar seien x_1, a_1, ... diejenigen Werte, welche aus den entsprechenden in (1) durch Veränderung von t in $t + dt$ hervorgehen. Sind x, a, ... stetige Functionen von t mit endlichen und stetigen Differentialquotienten x', a', ... für alle t innerhalb eines gewissen Intervalles, so kann man setzen:

$$\begin{cases} x_1 = x + x'dt + \alpha dt, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1 = a + a'dt + \lambda dt, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot, \end{cases} \tag{3}$$

wo α, ... λ, ... gleichzeitig mit dt gegen Null convergiren. Hieraus folgt

$$bc_1 - cb_1 = (bc' - cb')dt + (b\nu - c\mu)dt, \ldots,$$

und nach Substitution in die genannte Formel:

$$\pm dp = dt\,\frac{(bc' - cb')x' + (ca' - ac')y' + (ab' - ba')z' + T_1}{\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2} + T_2}, \tag{4}$$

wo T_1, T_2 Grössen derselben Art sind wie α, λ etc. Hierbei ist vorausgesetzt, dass nicht alle drei Grössen $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$ gleich Null sind. Tritt dies für specielle Werte von t ein, so schliessen wir sie von dem gewählten Intervalle aus. Man erhält aus der Gleichung (4) mit Leichtigkeit das Resultat, dass der kürzeste Abstand benachbarter Geraden einer Schaar im Allgemeinen von derselben Ordnung unendlich klein ist wie der Winkel der beiden Linien.

Es seien nun die sechs Functionen x, y, ... c für alle Werte von t durch die Relation

$$(bc' - cb')x' + (ca' - ac')y' + (ab' - ba')z' = 0 \tag{5}$$

verbunden. Zunächst ist leicht zu sehen, dass die Gleichung (5) nicht

für jede Schaar von Geraden erfüllt sein kann. Dies bedarf deshalb einer Erörterung, weil die sechs in (1) vorkommenden Functionen nur vier abhängigen äquivalent sind; denn die Gleichungen (1) können in der Form

$$\xi = k\xi + l, \qquad \eta = m\xi + n \tag{6}$$

geschrieben werden. Identificirt man nun diese Form mit der ersten, so findet sich für die linke Seite von (5) der im Allgemeinen von Null verschiedene Wert

$$k'n' - l'm'.$$

Besteht die Relation (5), so ist der Abstand benachbarter Geraden ein Unendlichkleines höherer Ordnung. Nehmen wir jetzt die zweiten Ableitungen von $x, y, \ldots$ hinzu, setzen also für (3):

$$x_1 = x + x'dt + \tfrac{1}{2}x''dt^2 + \alpha_1 dt^2, \ldots\ldots,$$

so ergibt die Durchführung der Rechnung:

$$\pm dp = \frac{1}{2}dt^2 \frac{(bc' - cb')x'' + (bc'' - cb'')x' + \cdots + \tau_1}{\sqrt{(bc' - cb')^2 + \cdots + \tau_2}}.$$

Hier bildet das Aggregat der Anfangsglieder im Zähler die Ableitung der linken Seite von (5); dieses Aggregat verschwindet also, und dp ist mindestens von der dritten Ordnung unendlich klein. Wollte man die Rechnung bis zu den Ableitungen dritter Ordnung fortsetzen, so würde man leicht finden, dass das folgende Aggregat nicht mehr die Ableitung des eben betrachteten ist. Der kürzeste Abstand dp ist mithin unter der Bedingung (5) im Allgemeinen wirklich von der dritten Ordnung unendlich klein.

Dies Resultat gilt immer dann, wenn die gegebene Schaar von Geraden durch die Tangenten einer beliebigen Raumcurve gebildet wird. Denn sind

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t)$$

die Gleichungen einer solchen, so wird eine Tangente der Curve durch die Gleichungen

$$\frac{\xi - f(t)}{f'(t)} = \frac{\eta - g(t)}{g'(t)} = \frac{\zeta - h(t)}{h'(t)} \tag{7}$$

gegeben. Vergleicht man diese mit (1), so ergibt sich sofort das Bestehen der Bedingung (5). Und man kann auch umgekehrt die Geraden einer Schaar, für welche diese Bedingung gilt, im Allgemeinen als Tangenten einer Curve auffassen. Dies folgt durch Identification der Gleichungen (6) und (7), aus welcher sich nach Berücksichtigung von $k'n' - l'm' = 0$ drei Relationen zur Bestimmung der drei Functionen f, g, h ergeben.

§ 40.

Wenden wir jetzt die eben durchgeführten Entwickelungen auf das System der Normalen einer Fläche an, indem wir uns diese Geraden zu Schaaren vereinigt denken. Die Gleichung § 39 (5) geht dann, wie schon im § 26 gefunden, über in

$$-\vartheta\left(\frac{du}{dt}\right)^2-(\vartheta'-\eta)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+\eta'\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=0$$

oder, nach Multiplication mit dt^2, in $\Gamma=0$. Die Integration dieser Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades zwischen u und v liefert zwei Schaaren von Curven, welche als Haupttangentencurven, vorwiegend aber als Krümmungslinien der Fläche bezeichnet werden. Eine solche kann also durch eine von folgenden Eigenschaften definirt werden: 1) Ihre Tangente fällt mit einer der beiden Haupttangenten zusammen; 2) der kürzeste Abstand benachbarter Normalen längs der Curve ist ein Unendlichkleines 3. Ordnung, wenn der Winkel dieser Normalen als unendlich kleine Grösse 1. Ordnung betrachtet wird. Dass die Krümmungslinien stets reell sind und sich überall unter rechten Winkeln schneiden, folgt nach § 12 aus der ersteren Eigenschaft.

Die Gleichung $\Gamma=0$ kann nach § 26 (6) durch eine der folgengenden Differentialgleichungen ersetzt werden:

$$\frac{dx}{dX}=\frac{dy}{dY}=\frac{dz}{dZ}, \tag{1}$$

welche auch geschrieben werden können:

$$dx=\mu dX,\quad dy=\mu dY,\quad dz=\mu dZ.$$

Die geometrische Bedeutung von μ ist leicht anzugeben. Multiplicirt man nämlich die drei Gleichungen mit dx, dy, dz und addirt sie, benutzt ferner die Formel [§ 10 (9)]

$$\varrho=-\frac{\Sigma dx^2}{\Sigma dx dX},$$

so erhält man

$$\mu=-\varrho.$$

Hierbei bezeichnet ϱ den Krümmungsradius desjenigen Normalschnitts in einem beliebigen Punkte A, welcher durch das Verhältnis $\frac{dv}{du}$ bestimmt wird. Für unseren Fall ist letzteres aus $\Gamma=0$ zu entnehmen, also ϱ einer der Hauptkrümmungsradien ϱ_1, ϱ_2. Daher gelten für die beiden Schaaren von Krümmungscurven die wichtigen Formeln:

$$(2) \qquad dx = -\varrho_k dX, \quad dy = -\varrho_k dY, \quad dz = -\varrho_k dZ \qquad (k = 1, 2).$$

Die Curve, welche die Normalen längs einer Krümmungslinie berühren, wird, wie leicht zu sehen, von den Endpunkten der zugehörigen Hauptkrümmungshalbmesser oder von den Krümmungsmittelpunkten der zugehörigen Normalschnitte gebildet. Nach § 10 bestehen für einen solchen die Gleichungen

$$\xi = x + \varrho_k X, \quad \eta = y + \varrho_k Y, \quad \zeta = z + \varrho_k Z.$$

Die rechten Seiten sind Functionen von u und v; da aber v als Function von u durch die Gleichung $\Gamma = 0$ bestimmt wird, so sind ξ, η, ζ von einem Parameter abhängig und stellen deshalb eine Curve dar. Bildet man für diese die Richtungscosinus der Tangente: $\frac{d\xi}{\pm\sqrt{\Sigma d\xi^2}}$ etc., so ergibt sich mit Hilfe der Formeln (2) unmittelbar die Uebereinstimmung mit X, Y, Z. D. h. die Tangente im Punkte $(\xi\eta\zeta)$ fällt mit der Flächennormale im entsprechenden Punkte (xyz) zusammen.

Wird die Abbildung auf die Gauss'sche Kugel hinzugenommen, so lehren die Gleichungen (2), dass die Tangenten einer Krümmungslinie und der transformirten Curve in zusammengehörigen Punkten einander parallel sind. Daraus folgt, dass die beiden Curvenschaaren auf der Kugel, in welche die Krümmungslinien transformirt werden, auf einander senkrecht stehen.

Sollen die Coordinatenlinien mit den Krümmungscurven zusammenfallen, also die Gleichung $\Gamma = 0$ durch $du = 0$, $dv = 0$ befriedigt werden, so müssen die Gleichungen

$$(3) \qquad \vartheta = 0, \quad \eta' = 0$$

oder

$$FL - EM = 0, \quad FN - GM = 0$$

bestehen, während $GL - EN$ von Null verschieden ist; und umgekehrt. Betrachtet man die beiden Relationen als homogen und linear in F und M, so bemerkt man, dass wegen des Nichtverschwindens der Determinante beide Grössen gleich Null sein müssen. Wir erhalten also die Bedingungen

$$(4) \qquad F = 0, \quad M = 0$$

wieder, welche im § 23 von einem anderen Gesichtspunkte aus gegeben wurden. Unter Voraussetzung ihres Bestehens lassen sich mit den Gleichungen der Flächentheorie beträchtliche Vereinfachungen vornehmen. Bevor wir jedoch hierauf näher eingehen, wollen wir die Differentialgleichung der Krümmungslinien noch für die beiden Darstellungsarten der Fläche in Cartesischen Coordinaten aufstellen.

§ 41.

Da die Differentialgleichung der Krümmungscurven mit der Bestimmungsgleichung der Hauptnormalebenen übereinstimmt, so kann sie ohne weiteres für den Fall angegeben werden, dass die Fläche in der Form

$$z = \varphi(x, y)$$

dargestellt ist. Nach § 16 (7) wird nämlich

$$(1)\quad [(1+p^2)s - pqr]\,dx^2 + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\,dxdy + [pqt - (1+q^2)s]\,dy^2 = 0$$

die gesuchte Gleichung; sie zeigt nach (10) desselben Paragraphen, dass für einen Kreispunkt die Krümmungslinien unbestimmt werden. Es ist häufig zweckmässig, sie in der Form

$$(2)\qquad \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}$$

zu schreiben, auf welche man in folgender Weise geführt wird.

Es seien nach § 8 (2)

$$(3)\qquad \xi - x + p(\zeta - z) = 0, \qquad \eta - y + q(\zeta - z) = 0$$

die Gleichungen der Normale in irgend einem Flächenpunkte A. Gefordert sei, einen benachbarten Punkt B, wenn möglich, so zu bestimmen, dass seine Normale die des Punktes A schneidet. Bezeichnet man mit Δz, Δp, Δq die vollständigen Veränderungen, welche z, p, q erleiden, wenn x, y um dx, dy wachsen, so sind die Gleichungen der Normale in B:

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi - x - dx + (p + \Delta p)(\zeta - z - \Delta z) = 0 \\ \eta - y - dy + (q + \Delta q)(\zeta - z - \Delta z) = 0. \end{cases}$$

Sollen die vier Relationen (3, 4) für ein Wertsystem (ξ η ζ) gleichzeitig gelten, so muss die Bedingungsgleichung

$$(5)\qquad \frac{dx + p\,\Delta z}{\Delta p} = \frac{dy + q\,\Delta z}{\Delta q}$$

bestehen, aus welcher sich im Allgemeinen nichts schliessen lässt. Kürzt man aber Δz, Δp, Δq auf die Incremente erster Ordnung dz, dp, dq ab, so erhält man die Gleichung (2), welche zwei Richtungen AB, AC bestimmt. Indess kann nur die exacte Rechnung des § 39 darüber Auskunft geben, in welcher Beziehung die Normalen von B und C zu der Normale des Punktes A stehen.

Die Gleichung (2) eignet sich besonders zur Transformation in die Form, welche für die Flächengleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

gelten muss — eine Transformation, welche im § 18 verschoben wurde. Nimmt man nämlich

$$p = -\frac{F_1}{F_3}, \quad q = -\frac{F_2}{F_3}$$

und ordnet nach dx, dy, dz, so folgt

$$(F_2 dF_3 - F_3 dF_2)dx + (F_3 dF_1 - F_1 dF_3)dy + (F_1 dF_2 - F_2 dF_1)dz = 0,$$

oder in Determinantenform

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ dF_1 & dF_2 & dF_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Hierin ist noch zu setzen

$$dz = -\frac{F_1 dx + F_2 dy}{F_3},$$

$$dF_1 = F_{11}dx + F_{12}dy + F_{13}dz, \ldots$$

Nach Ausführung der Rechnung ergibt sich:

$$\begin{aligned}(7) \quad & [F_3^3 F_{12} - F_3^2(F_1 F_{23} + F_2 F_{13}) + F_3 F_1^2 F_{12} + F_1 F_2 F_3(F_{33} - F_{11}) \\ & \qquad + F_1^2 F_2 F_{13} - F_1^3 F_{23}]\, dx^2 \\ & + [F_3^3(F_{22} - F_{11}) + 2F_3^2(F_1 F_{13} - F_2 F_{23}) + F_3 F_{33}(F_2^2 - F_1^2) \\ & \qquad + F_3(F_1^2 F_{22} - F_2^2 F_{11}) + 2F_1 F_2(F_2 F_{13} - F_1 F_{23})]\, dxdy \\ & + [-F_3^3 F_{12} + F_3^2(F_2 F_{13} + F_1 F_{23}) - F_3 F_2^2 F_{12} - F_1 F_2 F_3(F_{33} - F_{22}) \\ & \qquad - F_1 F_2^2 F_{23} + F_2^3 F_{13}]\, dy^2 = 0.\end{aligned}$$

Die Bedingungen für die Kreispunkte könnten hieraus sofort abgelesen, auch in eine symmetrische Form gesetzt werden. Doch wollen wir die Formeln nicht aufschreiben, wie denn überhaupt die Kreispunkte, deren Untersuchung der allgemeinen Flächentheorie fern liegt, hier nicht weiter in Betracht gezogen werden sollen. Es wird also stets das betrachtete Flächenstück als so begrenzt vorausgesetzt werden, dass $H^2 - 4K > 0$ ist.

Führt man, wie im § 18, an Stelle von F_1, F_2, F_3 die Grössen X, Y, Z ein, so geht die Gleichung (6) über in

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix} = 0.$$

§ 42.

Um ein Beispiel für die Bestimmung der Krümmungslinien zu geben, integriren wir ihre Differentialgleichung für das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b>c).$$

Durch Differentiation folgt:

$$p=-\frac{c^2x}{a^2z}, \quad q=-\frac{c^2y}{b^2z},$$

$$r=-\frac{c^4}{a^2z^3}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right), \quad s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}, \quad t=-\frac{c^4}{b^2z^3}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right),$$

woraus weiter nach einfachen Reductionen:

$$(1+q^2)\,s-pqt=-\frac{c^4(b^2-c^2)xy}{a^2b^4z^3}.$$

Vertauscht man x mit y, a mit b, so wird

$$(1+p^2)s-pqr=-\frac{c^4(a^2-c^2)xy}{a^4b^2z^3}.$$

Endlich ist

$$(1+q^2)r-(1+p^2)t=\frac{1}{s}\{r[(1+q^2)s-pqt]-t[(1+p^2)s-pqr]\}$$
$$=-\frac{c^4}{a^2b^2z^3}\left[\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2-\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2-(a^2-b^2)\right].$$

Setzt man diese Ausdrücke in § 41 (1) ein und dividirt die entstehende Gleichung durch $\frac{c^4(a^2-c^2)}{a^4b^2z^3}$, so ergibt sich

$$(1)\quad \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[x^2-\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}y^2-\frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}\right]\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

Die Grössen a, b, c kommen in dieser Differentialgleichung nur in den zwei Verbindungen

$$(2)\qquad \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}=A, \quad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}=B$$

vor; die Gleichung kann daher geschrieben werden

$$(3)\qquad Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-Ay^2-B)\frac{dy}{dx}-xy=0$$

(für A und B als positive Grössen).

Zur Integration dieser Differentialgleichung bieten sich mehrere Wege dar. Zunächst kann man (nach Monge) versuchen, durch nochmalige Differentiation von (3) nach x und Combination des entstehenden Resultates mit (3) eine Gleichung zweiter Ordnung abzuleiten, welche formell einfacher ist als die ursprüngliche, die zwar nur von der ersten Ordnung, aber vom zweiten Grade ist. Gelingt es, das Integral der neuen Gleichung zu finden, so ist dasselbe noch so zu specialisiren, dass auch die erste Gleichung befriedigt wird. Setzt man nun zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx}=y', \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=y''$$

und führt die Differentiation aus, so folgt

$$2Axyy'y'' + Ay'^2(xy' + y) + (x^2 - Ay^2 - B)y'' + 2(x - Ayy')y' - (xy' + y) = 0$$

oder

$$(4)\quad (Ay'^2 + 1)(xy' - y) + 2Axyy'y'' + (x^2 - Ay^2 - B)y'' = 0.$$

Wird jetzt aus (3) und (4) die Grösse $x^2 - Ay^2 - B$ eliminirt, so ergibt sich nach Fortlassung des wesentlich positiven Factors $(Ay'^2 + 1)$:

$$(5)\quad xyy'' + (xy' - y)y' = 0$$

oder, nach Division mit xyy':

$$\frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x} = 0,$$

welche Gleichung das Integral

$$\log y' + \log y - \log x = \log C$$

oder

$$y\frac{dy}{dx} = Cx$$

liefert. Durch abermalige Integration folgt

$$y^2 = Cx^2 + C',$$

worin noch

$$C' = -\frac{BC}{AC + 1}$$

genommen werden muss, um die Gleichung (3) zu befriedigen; C bleibt willkürlich. Demnach projiciren sich die Krümmungscurven des Ellipsoids auf die (xy)-Ebene in einer Schaar von Kegelschnitten, deren Gleichung ist

$$(6)\quad Cx^2 - y^2 = \frac{BC}{AC + 1}.$$

Bevor das abgeleitete Resultat genauer discutirt wird, soll noch eine zweite Integrationsmethode für die Gleichung (3) angegeben werden. Multiplicirt man (3) mit xy und setzt dann

$$x^2 = \xi, \qquad y^2 = \eta,$$

so ergibt sich als transformirte Differentialgleichung

$$A\xi\eta'^2 + (\xi - A\eta - B)\eta' - \eta = 0$$

oder

$$(7)\quad \eta = \xi\eta' - \frac{B\eta'}{A\eta' + 1}.$$

Diese Gleichung bildet einen Specialfall der Clairaut'schen:

$$\eta = \xi\eta' + f(\eta'),$$

deren Integral ist

$$\eta = C\xi + f(C).$$

Setzt man hierin

$$f(C) = -\frac{BC}{AC+1}$$

und führt für ξ und η ihre Werte ein, so ergibt sich wiederum die Gleichung (6).

Um nunmehr aus dieser Gleichung übersichtliche Folgerungen ziehen zu können, bezeichnen wir die Halbaxen des Ellipsoids etwas anders als vorher und setzen die Flächengleichung in die Form

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b'^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c'^2} = 1. \tag{8}$$

Da ursprünglich

$$a > b > c > 0$$

war, so muss jetzt

$$\lambda > c' > b' > 0$$

sein. Man erhält weiter

$$A = \frac{\lambda^2 (c'^2 - b'^2)}{c'^2 (\lambda^2 - b'^2)}, \quad B = \frac{\lambda^2 b'^2}{c'^2}.$$

Endlich werde noch an Stelle von C eine neue Constante μ^2 eingeführt durch die Gleichung

$$AC + 1 = \frac{b^2}{\mu^2}.$$

Diese Substitution setzt $AC + 1$ als positive Grösse voraus. In der That ist diese Bedingung erfüllt; denn wäre $AC + 1 < 0$, so müsste, da $A > 0$ ist, $C < 0$ sein. Die Gleichung (6) würde dann eine imaginäre Curve darstellen, was der Realität der Krümmungscurven widerspricht. Führt man die neuen Zeichen in (6) ein, so wird erhalten

$$\frac{c'^2 x^2}{\lambda^2 \mu^2} + \frac{(c'^2 - b'^2) y^2}{(\lambda^2 - b'^2)(\mu^2 - b'^2)} = 1. \tag{9}$$

Diese Gleichung ist symmetrisch in λ und μ. Sie stellt also auch die Projection der Krümmungslinien auf die (xy)-Ebene für eine Fläche 2. Grades dar, welche durch

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b'^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c'^2} = 1 \tag{10}$$

gegeben wird. Betrachten wir jetzt die Projection der Durchschnittscurve der Flächen (8) und (10) auf die Ebene der (xy). Durch Elimination von z^2 folgt

$$\left(\frac{\lambda^2 - c'^2}{\lambda^2} - \frac{\mu^2 - c'^2}{\mu^2}\right) x^2 + \left(\frac{\lambda^2 - c'^2}{\lambda^2 - b'^2} - \frac{\mu^2 - c'^2}{\mu^2 - b'^2}\right) y^2 = \lambda^2 - \mu^2,$$

und weiter nach Vereinfachung und Division durch $\lambda^2 - \mu^2$:

$$\frac{c'^2 x^2}{\lambda^2 \mu^2} + \frac{(c'^2 - b'^2) y^2}{(\lambda^2 - b'^2)(\mu^2 - b'^2)} = 1,$$

d. h. genau die Gleichung (9). Analoges gilt für die Projectionen auf die anderen Coordinatenebenen. Hieraus ergibt sich, dass die Durch-

schnittscurve der zwei Flächen, falls sie reell ist, Krümmungslinie auf beiden sein muss. Nun findet man leicht, dass für

$$c'^2 > \mu^2 > b'^2 \tag{11}$$

oder

$$b'^2 > \mu^2$$

die Schnittcurve reell ist, für $\mu^2 > c'^2$ dagegen nicht. Schreibt man im zweiten Fall ν für μ, setzt also

$$b'^2 > \nu^2 > 0, \tag{12}$$

so ergibt sich: Die Fläche

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b'^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c'^2} = 1 \tag{8}$$

wird von den Flächen

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b'^2} - \frac{z^2}{c'^2 - \mu^2} = 1 \tag{10}$$

und

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b'^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c'^2 - \nu^2} = 1 \tag{13}$$

in ihren Krümmungslinien geschnitten; und zwar erhält man die beiden Schaaren dieser Curven, wenn man μ und ν alle Werte erteilt, welche den Ungleichungen (11) und (12) entsprechen. Die vorher durchgeführte Untersuchung lehrt, dass auch umgekehrt jede der Flächen (10) oder (13) von den Flächen (8, 13) resp. (8, 10) in ihren Krümmungslinien geschnitten wird, wenn man dem Parameter λ alle Werte

$$\lambda^2 > c'^2$$

erteilt.

Die Gleichungen (10), (13) stellen einschalige resp. zweischalige Hyperboloide dar. Ihre Hauptschnitte haben, wie aus den Gleichungen sofort ersichtlich, dieselben Brennpunkte wie die Hauptschnitte der durch (8) dargestellten Ellipsoide. In Folge dessen heissen die drei durch (8), (10), (13) gegebenen Flächenschaaren zweiten Grades confocal. Das Resultat der Untersuchung ist mithin, dass confocale Flächen zweiten Grades sich gegenseitig in ihren Krümmungslinien schneiden. Discutirt man die Projectionen der Schnittcurven auf die Coordinatenebenen, so findet man leicht, dass confocale Flächen derselben Art sich niemals schneiden, confocale Flächen verschiedener Arten dagegen immer.

Die Flächen (8), (10), (13) schneiden sich, wenn sie sich überhaupt treffen, stets unter rechten Winkeln. Bildet man nämlich die Richtungscosinus der Normale z. B. für das Ellipsoid (8) und für

das einschalige Hyperboloid (10), so sind dieselben proportional den Grössen

$$\frac{x}{\lambda^2}, \quad \frac{y}{\lambda^2 - b'^2}, \quad \frac{z}{\lambda^2 - c'^2} \quad \text{resp.} \quad \frac{x}{\mu^2}, \quad \frac{y}{\mu^2 - b'^2}, \quad \frac{-z}{c'^2 - \mu^2}.$$

Es muss also längs der Durchschnittscurve die Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2 \mu^2} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - b'^2)(\mu^2 - b'^2)} - \frac{z^2}{(\lambda^2 - c'^2)(c'^2 - \mu^2)} = 0$$

bestehen, welche in der That erfüllt ist, weil sie auch durch Subtraction der Gleichungen (8) und (10) erhalten wird.

Kehren wir jetzt speciell zu dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

zurück und setzen

$$\lambda^2 = a^2, \quad \lambda^2 - b'^2 = b^2, \quad \lambda^2 - c'^2 = c^2.$$

Aus den Ungleichheitsbedingungen (11), (12) folgt dann:

$$b^2 > a^2 - \mu^2 > c^2$$
$$a^2 > a^2 - \nu^2 > b^2.$$

Es werde noch gesetzt:

$$a^2 - \mu^2 = u, \qquad a^2 - \nu^2 = v;$$

dann ergibt sich nach Transformation der Gleichungen (8), (10), (13):

Das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wird von den einschaligen Hyperboloiden

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 - u} = 1 \qquad (b^2 > u > c^2)$$

und den zweischaligen Hyperboloiden

$$\frac{x^2}{a^2 - v} + \frac{y^2}{b^2 - v} + \frac{z^2}{c^2 - v} = 1 \qquad (a^2 > v > b^2)$$

in seinen Krümmungscurven geschnitten. Löst man die drei letzten Gleichungen nach x, y, z auf, so erhält man eine Darstellung der Cartesischen Coordinaten des Ellipsoids durch die beiden unabhängigen Variablen u, v, welche als elliptische Coordinaten bezeichnet werden. Die Durchführung der Rechnung liefert:

$$(14) \qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{a^2(a^2 - u)(a^2 - v)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ y^2 = \dfrac{b^2(b^2 - u)(b^2 - v)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \\ z^2 = \dfrac{c^2(c^2 - u)(c^2 - v)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{cases}$$

Erwähnt sei noch, dass auch für die Paraboloide die Krümmungslinien durch eine Gleichung von der Form (3) definirt werden. Man würde also diese Linien durch Anwendung derselben Integrationsmethoden wie vorher erhalten können.

§ 43.

Bildet man aus den zuletzt angegebenen Gleichungen die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von x, y und z nach den elliptischen Coordinaten und stellt aus ihnen die Fundamentalgrössen her, so findet man, der allgemeinen Theorie entsprechend, für F und M den Wert Null. Ferner ergibt sich

$$(1)\quad E = \frac{u(u-v)}{4(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}, \quad G = \frac{v(v-u)}{4(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)},$$

mithin wird das Quadrat des Linienelements:

$$(2)\quad ds^2 = \frac{u-v}{4}\left[\frac{u\,du^2}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)} - \frac{v\,dv^2}{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}\right].$$

Hier führen wir noch andere Variable u', v' ein durch die Gleichungen

$$(3)\quad \frac{\sqrt{-u}\,du}{\sqrt{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}} = du', \qquad \frac{\sqrt{v}\,dv}{\sqrt{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}} = dv',$$

in welchen die Ausdrücke links, den für u und v geltenden Ungleichheitsbedingungen gemäss, reelle Werte haben. Bei passender Wahl der Bereiche von u, v und u', v' wird bei einer derartigen Substitution (cf. § 19) die Gesammtheit der dargestellten Curven nicht geändert; d. h. es sind hier u', v' wieder als Parameter der Krümmungslinien zu betrachten.

Der Ausdruck von ds^2 erhält nun die Gestalt

$$(4)\quad ds^2 = \frac{V'-U'}{4}(du'^2 + dv'^2),$$

wo U' eine Function von u', V' eine Function von v' allein bezeichnet. Für die neuen Coordinaten gilt also unter den Fundamentalgrössen die Beziehung

$$(5)\quad E' = G' = \frac{V'-U'}{4}.$$

Aus ihr folgt nach § 3, wenn man noch $du' = dv'$ nimmt, die Gleichung $ds' = ds''$; d. h. es sind für gleiche Incremente der krummlinigen Coordinaten auch die Bogenelemente der Coordinatenlinien einander gleich. In diesem Fall sagt man, die Fläche werde durch die Coordinatenlinien in unendlichkleine Quadrate geteilt, und nennt das Curvensystem, welches eine solche Zerlegung bewirkt, ein isometri-

sches. Für das Ellipsoid (und ebenso für die beiden Hyperboloide) folgt hiernach aus dem Vorhergehenden der Satz, dass die Krümmungslinien ein System isometrischer Curven bilden.

Dasselbe Theorem gilt auch für eine beliebige Rotationsfläche. Zunächst ist vom geometrischen Standpunkte einleuchtend, dass die beiden Schaaren von Krümmungslinien durch die Meridiane und die Parallelkreise gebildet werden. Denn die Flächennormalen, welche zu einem Parallelkreise gehören, gehen sämmtlich durch einen und denselben Punkt der Rotationsaxe, und die Normalen längs eines Meridians schneiden sich, weil sie zugleich Normalen dieser ebenen Curve sind. Auf analytischem Wege verificirt man dieses Resultat dadurch, dass man aus den Gleichungen § 19 (5) die Fundamentalgrössen bildet, wobei $F = 0$, $M = 0$ erhalten wird. Nimmt man nun das Quadrat des Linienelements in der Form § 19 (6)

$$ds^2 = (1 + f'(u)^2)\, du^2 + u^2 dv^2$$

an und setzt

$$\frac{\sqrt{1 + f'(u)^2}}{u}\, du = du',$$

so ergibt sich

$$ds^2 = U' (du'^2 + dv^2), \tag{6}$$

wo U' den Wert von u^2, durch u' ausgedrückt, bezeichnet. Diese Gleichung beweist aber das Behauptete; denn sie liefert

$$E' = G' = U'. \tag{7}$$

Die allgemeine Theorie der isometrischen Curven wird im § 49 genauer besprochen werden.

§ 44.

Will man die Hauptformeln der Flächentheorie für die Krümmungslinien als Coordinatenlinien specialisiren, was bei vielen Aufgaben ganz besonders nützlich ist, so hat man nur die Resultate der Paragraphen 37 und 38 mit einander zu verbinden. Denn die Krümmungscurven sind gleichzeitig conjugirt und senkrecht zu einander.

Es ergibt sich

$$\eta = -GL, \quad \vartheta = 0, \quad \eta' = 0, \quad \vartheta' = -EN, \tag{1}$$

und daher

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{L}{E}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{N}{G}\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{2}$$

Die Hauptkrümmungsradien lassen sich rational durch die Fundamentalgrössen ausdrücken; denn es wird

$$\varrho_1 = \frac{E}{L}, \qquad \varrho_2 = \frac{G}{N}, \tag{3}$$

demnach

$$H = \frac{L}{E} + \frac{N}{G} \tag{4}$$

$$K = \frac{LN}{EG}. \tag{5}$$

Die Beziehung zwischen zwei beliebigen, auf einander senkrechten Tangenten wird gegeben durch

$$Edu\delta u + Gdv\delta v = 0, \tag{6}$$

und die zwischen zwei conjugirten Tangenten ist

$$Ldu\delta u + Ndv\delta v = 0, \tag{7}$$

woraus für die asymptotischen Richtungen die Gleichung folgt:

$$Ldu^2 + Ndv^2 = 0. \tag{8}$$

Für einen beliebigen Normalschnitt bestimmt die Formel

$$\varrho = \frac{Edu^2 + Gdv^2}{Ldu^2 + Ndv^2} \tag{9}$$

den Wert des Krümmungshalbmessers.

Combinirt man (2) mit (3), so erhält man

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial x}{\partial v}, \tag{10}$$

woraus nach Multiplication mit du bezw. dv wieder die Formeln § 40 (2) folgen.

Die Gauss'sche Relation unter den Fundamentalgrössen erhält nach § 37 (3) die Gestalt

$$LN = \frac{1}{4G}\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right] + \frac{1}{4E}\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right), \tag{11}$$

während die beiden anderen durch § 38 (3) gegeben werden. Hierin haben die Grössen J die speciellen Werte § 37 (2). Setzt man sie ein, so ergibt sich

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right)\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \\ \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right)\frac{\partial G}{\partial u} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

In derselben Weise findet man als lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung [§ 38 (8)], welche für $\chi = x, y, z$ gilt:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \chi}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial \chi}{\partial v} = 0. \tag{13}$$

Die Fundamentalgrössen der Gauss'schen Kugel werden durch die Gleichungen

$$(14) \qquad \mathfrak{E} = \frac{L^2}{E}, \quad \mathfrak{F} = 0, \quad \mathfrak{G} = \frac{N^2}{G}$$

gegeben, deren zweite besagt (cf. § 40), dass den Krümmungslinien einer Fläche ein System orthogonaler Curven auf der Einheitskugel entspricht.

Endlich finden sich für die Fundamentalgrössen dritter Ordnung folgende Ausdrücke:

$$(15) \qquad \begin{cases} P = \dfrac{\partial L}{\partial u} - \dfrac{L}{E}\dfrac{\partial E}{\partial u} \\ Q = \dfrac{\partial L}{\partial v} - \dfrac{L}{E}\dfrac{\partial E}{\partial v} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L}{E} - \dfrac{N}{G}\right)\dfrac{\partial E}{\partial v} \\ R = \dfrac{\partial N}{\partial u} - \dfrac{N}{G}\dfrac{\partial G}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L}{E} - \dfrac{N}{G}\right)\dfrac{\partial G}{\partial u} \\ S = \dfrac{\partial N}{\partial v} - \dfrac{N}{G}\dfrac{\partial G}{\partial v}. \end{cases}$$

Nach § 34 (5) müssen sich $P, \ldots S$ durch die Fundamentalgrössen 1. und 2. Ordnung und die Ableitungen der Hauptkrümmungsradien ausdrücken lassen. Für unsere jetzige Annahme lassen sich ferner die Fundamentalgrössen 2. Ordnung überall durch die Hauptkrümmungsradien ersetzen. Schreibt man noch

$$\frac{1}{\varrho_k} = r_k,$$

wo also r_1, r_2 die Hauptkrümmungen bezeichnen, so ergibt sich

$$(16) \qquad \begin{cases} P = E\dfrac{\partial r_1}{\partial u} = -\dfrac{E}{\varrho_1^2}\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial u}, \quad Q = E\dfrac{\partial r_1}{\partial v} = -\dfrac{E}{\varrho_1^2}\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial v} \\ R = G\dfrac{\partial r_2}{\partial u} = -\dfrac{G}{\varrho_2^2}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial u}, \quad S = G\dfrac{\partial r_2}{\partial v} = -\dfrac{G}{\varrho_2^2}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial v}. \end{cases}$$

Führt man r_1 und r_2 auch in die Fundamentalgleichungen (12) ein, so nehmen diese die Form an:

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r_1}{\partial v} + \dfrac{1}{2}(r_1 - r_2)\dfrac{\partial \log E}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial u} + \dfrac{1}{2}(r_2 - r_1)\dfrac{\partial \log G}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

oder auch

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial v} - \dfrac{\varrho_1}{2E}\left(1 - \dfrac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\dfrac{\partial E}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial u} - \dfrac{\varrho_2}{2G}\left(1 - \dfrac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)\dfrac{\partial G}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Aus (17) folgt noch in Verbindung mit § 37 (2):

$$(19) \qquad \begin{cases} J_1' = \dfrac{1}{r_2 - r_1}\dfrac{\partial r_1}{\partial v}, \quad J_2' = \dfrac{1}{r_1 - r_2}\dfrac{\partial r_2}{\partial u} \\ J_1'' = \dfrac{G}{E(r_2 - r_1)}\dfrac{\partial r_2}{\partial u}, \quad J_2 = \dfrac{E}{G(r_1 - r_2)}\dfrac{\partial r_1}{\partial v}. \end{cases}$$

Um für allgemeine Coordinaten die Richtungscosinus der Tangenten der Krümmungslinien zu finden, hat man in den Ausdrücken

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}}, \cdots$$

für $\frac{dv}{du}$ die Werte λ_1, λ_2 zu setzen, welche durch die, im § 12 aufgestellten Gleichungen

$$\lambda_k = -\frac{E - L\varrho_k}{F - M\varrho_k} = -\frac{F - M\varrho_k}{G - N\varrho_k} \tag{20}$$

mit den Hauptkrümmungsradien zusammenhängen. Wird für die erste Krümmungslinie die Richtung bevorzugt, für welche $du > 0$ ist, so folgt

$$\cos\alpha_1 = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{E + 2F\lambda_1 + G\lambda_1^2}}, \cdots$$

Nimmt man alsdann für λ_1 den zweiten der oben angegebenen Werte, um bei der Annahme $F = 0$, $M = 0$ nicht Zähler und Nenner der Cosinus zum Verschwinden zu bringen, so wird

$$\frac{\partial x}{\partial u} + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{(G - N\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial u} - (F - M\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial v}}{G - N\varrho_1} \tag{21}$$

$$\sqrt{E + 2F\lambda_1 + G\lambda_1^2} = T\sqrt{\frac{1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}}{G - N\varrho_1}}, \tag{22}$$

mithin

$$\cos\alpha_1 = \frac{(G - N\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial u} - (F - M\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial v}}{T(G - N\varrho_1)}\sqrt{\frac{G - N\varrho_1}{1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}}}. \tag{23}$$

Bei dieser Schreibweise ist $\cos\alpha_1$ eindeutig bestimmt, da unter der Wurzelgrösse, wie immer, der positive Wert verstanden wird. Hebt man dagegen einmal $\sqrt{G - N\varrho_1}$ fort, so ist ein Vorzeichen einzuführen, sodass

$$\cos\alpha_1 = \frac{(G - N\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial u} - (F - M\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial v}}{\varepsilon T\sqrt{(G - N\varrho_1)\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)}} \tag{24}$$

zu schreiben ist. — Für die zweite Krümmungslinie ist es zweckmässig, die positive Richtung durch $dv > 0$ zu kennzeichnen und für λ_2 den ersten der Werte (20) zu setzen. Dann ergibt sich

$$\cos\alpha_2 = \frac{(E - L\varrho_2)\frac{\partial x}{\partial v} - (F - M\varrho_2)\frac{\partial x}{\partial u}}{T(E - L\varrho_2)}\sqrt{\frac{E - L\varrho_2}{1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}}} \tag{25}$$

oder

$$\cos\alpha_2 = \frac{(E - L\varrho_2)\frac{\partial x}{\partial v} - (F - M\varrho_2)\frac{\partial x}{\partial u}}{\varepsilon' T \sqrt{(E - L\varrho_2)\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}}. \tag{26}$$

Die Ausdrücke (23, 25) und die analogen gehen für $F = 0$, $M = 0$, wie es sein muss, in die Richtungscosinus der positiven Coordinatenlinien über.

§ 45.

Für die Ermittelung der Krümmungslinien auf gegebenen Flächen ist folgender Satz, welcher als das Dupin'sche Theorem bezeichnet wird, von hervorragender Wichtigkeit: Drei Schaaren von Flächen, welche einander überall unter rechten Winkeln treffen, schneiden sich gegenseitig in ihren Krümmungscurven.

Es seien

$$F(x, y, z) = u, \quad G(x, y, z) = v, \quad H(x, y, z) = w$$

für variable Parameter u, v, w die Gleichungen der drei Schaaren. Durch Auflösung nach den Cartesischen Coordinaten möge für einen gewissen Bereich der Parameter erhalten werden:

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w).$$

Gibt man u einen constanten Wert c, so stellen diese Gleichungen die Fläche $F(x, y, z) = c$ oder einen Teil derselben durch die krummlinigen Coordinaten v, w dar, während die Annahme $u = c$, $v = c'$ Punkte der Schnittlinie von $F(x, y, z) = c$ mit $G(x, y, z) = c'$ liefert. Es seien nun X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale für die erste Fläche; X', Y', Z', X'', Y'', Z'' sollen dieselbe Bedeutung für die beiden anderen Flächen haben. Die Voraussetzung, dass die Flächen sich stets unter rechten Winkeln schneiden, wird durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' &= 0 \\ X''X + Y''Y + Z''Z &= 0 \\ XX' + YY' + ZZ' &= 0 \end{aligned}\right. \tag{1}$$

ausgesprochen. Es ist geometrisch einleuchtend, dass die Curven $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$ auf der ersten Fläche ein orthogonales System bilden, dass also die Gleichung $\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} = 0$ oder $F = 0$ stattfindet; und ebenso gelten die Relationen

$$\sum \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u} = F' = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = F'' = 0.$$

Analytisch werden diese Beziehungen in folgender Weise aus (1) abgeleitet.

Die erste und dritte Gleichung lassen sich schreiben:

$$X' : Y' : Z' = Y''Z - Z''Y : Z''X - X''Z : X''Y - Y''X.$$

Ferner ist nach der Definition der Richtungscosinus der Normale:

$$X : Y : Z = \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} : \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} : \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w},$$

während die entsprechenden Formeln für $X', \ldots, X'', \ldots$ durch cyklische Permutation von u, v, w aus dieser hervorgehen. Hiernach ergibt sich leicht

$$X' : Y' : Z' = \frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial y}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial v}$$

oder

$$(2)\qquad \begin{cases} X' = \mu' \dfrac{\partial x}{\partial v}, & Y' = \mu' \dfrac{\partial y}{\partial v}, & Z' = \mu' \dfrac{\partial z}{\partial v}, \text{ und ebenso} \\ X = \mu \dfrac{\partial x}{\partial u}, & Y = \mu \dfrac{\partial y}{\partial u}, & Z = \mu \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ X'' = \mu'' \dfrac{\partial x}{\partial w}, & Y'' = \mu'' \dfrac{\partial y}{\partial w}, & Z'' = \mu'' \dfrac{\partial z}{\partial w}. \end{cases}$$

Setzt man dies in (1) ein, so folgt in der That:

$$(3)\qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Der Dupin'sche Satz würde bewiesen sein, wenn ausser diesen Gleichungen noch die Relationen $M = 0$, $M' = 0$, $M'' = 0$ dargethan wären. Denn $F = 0$, $M = 0$ waren nach § 40 (4) die Bedingungen dafür, dass die Coordinatenlinien auf der ersten Fläche durch die Krümmungscurven gebildet werden. Differentiirt man nun die Gleichungen (3), welche ebenso wie (1) für einen gewissen Bereich der Parameter gelten, nach diesen Grössen, und zwar die erste nach u, die zweite nach v, die dritte nach w, so folgt

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} + \sum \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0$$
$$\sum \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = 0$$
$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} = 0,$$

d. h.

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0,$$

und wenn man für $\frac{\partial x}{\partial u}$ etc. die Werte aus (2) substituirt,

$$(4)\qquad \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = M = 0, \quad \sum X' \frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} = M' = 0,$$
$$\sum X'' \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = M'' = 0,$$

was bewiesen werden sollte.

Als Beispiel für ein solches dreifaches Orthogonalsystem, wie es beim Dupin'schen Satze erfordert wird, kann das System der confocalen Mittelpunktsflächen 2. Grades dienen, welches durch die Gleichungen § 42 (8, 10, 13) bestimmt ist. Bemerkenswert ist hier, dass die drei Flächenschaaren durch dieselbe Gleichungsform repräsentirt werden, und dass nur die Intervalle der Parameter λ, μ, ν für die drei Schaaren verschieden sind.

§ 46.

Die Krümmungslinien hatten (§ 40) die Eigenschaft, dass ihre Tangenten überall mit den Hauptaxenrichtungen des Dupin'schen Kegelschnitts zusammenfallen. Wir fragen jetzt auch nach denjenigen Curven, deren Tangenten in jedem Punkte mit den asymptotischen Richtungen übereinstimmen. Diese Linien, welche man als Asymptotencurven bezeichnet, werden nach § 14 (5) durch die Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0 \tag{1}$$

definirt. Sie können nur auf Flächen negativen Krümmungsmasses reell sein; durch jeden Punkt einer solchen gehen zwei von ihnen hindurch. Man gelangt zu den Asymptotencurven auch durch die Forderung, diejenigen Curven auf einer Fläche zu bestimmen, deren Schmiegungsebene die Fläche berührt, oder deren rectificirende Ebene die Flächennormale enthält. Die Gleichung der rectificirenden Ebene einer Raumcurve ist

$$(cdy - bdz)(\xi - x) + (adz - cdx)(\eta - y) + (bdx - ady)(\zeta - z) = 0,$$

wo a, b, c durch § 9 (2) gegeben werden. Demnach hat man als Bedingung für die gestellte Forderung

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dx & dy & dz \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Nun ist weiter nach § 9:

$$cdy - bdz = dxds d^2s - d^2x ds^2,$$

mithin, da $\Sigma X dx = 0$:

$$\Sigma X d^2x = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0.$$

Nach § 10 (8) kann die Gleichung auch geschrieben werden

$$\Sigma dx dX = 0 \tag{3}$$

und besagt in dieser Form, dass die Tangente einer Asymptotenlinie

und die Tangente der entsprechenden Curve auf der Gauss'schen Kugel auf einander senkrecht stehen.

Aus (3) ergibt sich sofort die Differentialgleichung der Asymptotenlinien auch für die Fälle, dass $z = \varphi(x, y)$ oder $F(x, y, z) = 0$ die Darstellung der Fläche ist. Für die erste Annahme folgt

$$dx\,dp + dy\,dq = 0$$

oder

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0, \tag{4}$$

für die zweite:

$$dx\,d\frac{\partial F}{\partial x} + dy\,d\frac{\partial F}{\partial y} + dz\,d\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

in welcher Form die Differentiale noch zu entwickeln wären.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Coordinatenlinien durch die beiden Schaaren der Asymptotencurven gebildet werden, folgen aus (1) in der Form

$$L = 0, \quad N = 0, \quad (M \gtrless 0). \tag{6}$$

Besteht nur die eine Schaar der Coordinatenlinien, etwa $v = \text{const.}$, aus Asymptotencurven, so ergibt sich

$$L = 0.$$

§ 47.

Die letzte Bemerkung gestattet, für eine ausgedehnte Klasse von Flächen die eine Schaar der Asymptotenlinien sofort anzugeben. Es seien die Gleichungen einer Geraden in der Form

$$x = x_0 + au, \quad y = y_0 + bu, \quad z = z_0 + cu \tag{1}$$

vorausgesetzt, wo die verschiedenen Werte von u den verschiedenen Punkten der Geraden entsprechen. Denkt man sich x_0, y_0, z_0, a, b, c als gegebene Functionen eines Parameters v, so hat man es mit einer Schaar von Geraden zu thun, deren geometrischer Ort eine geradlinige Fläche genannt wird. Ihre Gleichung zwischen x, y und z würde aus (1) durch Elimination der Variabeln u und v erhalten werden.

Da die drei Cartesischen Coordinaten den Parameter u nur im ersten Grade enthalten, so genügen sie der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} = 0$, ein Umstand, welcher nach der Definition von L [§ 9 (6)] das Verschwinden dieser Grösse nach sich zieht. In Folge dessen besteht die Schaar $v = \text{const.}$ aus Asymptotenlinien; dieselbe wird aber andererseits durch die erzeugenden Geraden der Fläche gebildet. — Selbstverständlich kann hier von der zweiten, im vorigen

Paragraphen angegebenen Eigenschaft der Asymptotenlinien nicht mehr die Rede sein, da die Schmiegungsebene für eine gerade Linie unbestimmt wird.

Machen wir von dem gefundenen Resultat eine Anwendung auf die Flächen 2. Grades. Von vornherein kommen, wenn man von den Kegel- und Cylinderflächen absieht, nur das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid in Betracht; denn diese sind die einzigen convex-concaven Flächen (§ 20). Jede von ihnen kann auf doppelte Weise durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden. Und die beiden Schaaren von Geraden müssen mit den beiden Schaaren der Asymptotenlinien identisch sein, sodass diese ohne Integration vollständig angegeben werden können. Wollte man dies Ergebnis z. B. für das Hyperboloid mit Hilfe der Darstellung durch elliptische Coordinaten (cf. § 42) ableiten, so würde man auf die Euler'sche Differentialgleichung geführt werden.

Als weiteres Beispiel einer Fläche, deren Asymptotencurven gefunden werden sollen, wählen wir die Schraubenfläche. Dieselbe wird durch eine Gerade erzeugt, welche eine feste Axe stets senkrecht schneidet und sich dabei so bewegt, dass die Strecken, um welche der Schnittpunkt auf der Axe fortrückt, proportional sind den Winkeln, um welche die Gerade sich dreht. Die feste Axe sei als z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems angenommen. Die Drehungswinkel v sollen von der positiven x-Axe aus, die Strecken auf der z-Axe vom Coordinatenanfangspunkt aus gezählt werden. In irgend einer Lage sind die Gleichungen der Geraden

$$y = x \operatorname{tg} v$$
$$z = h,$$

deren zweite, da h dem Winkel v proportional sein sollte, übergeht in

$$z = kv$$

für k als eine gegebene Constante. Man kann daher die Fläche entweder darstellen durch

$$z = k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \tag{2}$$

oder durch die drei Gleichungen

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = kv. \end{cases} \tag{3}$$

Der Bereich der Variabilität ist für u und v unbegrenzt, doch genügt es, v von 0 bis 2π variiren zu lassen, da die Fläche sich sodann

periodisch wiederholt. Legen wir die erste Darstellung zu Grunde, so ergibt sich

$$(4)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{-ky}{x^2+y^2}, \quad q = \dfrac{kx}{x^2+y^2} \\ r = \dfrac{2kxy}{(x^2+y^2)^2}, \quad s = \dfrac{k(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad t = \dfrac{-2kxy}{(x^2+y^2)^2}, \end{cases}$$

und $rt - s^2$ wird, wie es nach § 20 (3) sein muss, negativ. Die Differentialgleichung § 46 (4) liefert

$$xydx^2 + (y^2 - x^2)\,dxdy - xydy^2 = 0$$

oder

$$(ydx - xdy)(xdx + ydy) = 0$$

mit den Integralgleichungen

$$y = Cx, \qquad x^2 + y^2 = C',$$

von denen die erste eine Ebene durch die Axe der Schraubenfläche, die zweite einen Kreiscylinder mit derselben Axe darstellt. Die Asymptotencurven werden also gebildet: 1) durch die erzeugenden Geraden (dem Vorhergehenden entsprechend); 2) durch eine Schaar von Schraubenlinien.

Aus (4) folgt, wie beiläufig erwähnt sei, die Gleichung

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

Sie besagt nach § 16 (8), dass für die Schraubenfläche, ebenso wie für die Rotationsfläche der Kettenlinie (§ 19), die Summe der beiden Hauptkrümmungsradien gleich Null ist.

Endlich sollen die Asymptotencurven noch für die Rotationsflächen bestimmt werden. Nach § 19 (5) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} &= -uf'(u)\cos v \\ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} &= -uf'(u)\sin v \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} &= u, \end{aligned}$$

und hieraus, da u als Radius vector stets positiv vorausgesetzt werden kann:

$$(5)\quad X = -\frac{f'(u}{\sqrt{1+f'(u)^2}}\cos v, \quad Y = -\frac{f'(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}\sin v, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+f'(u)^2}}.$$

Die Fundamentalgrössen erhalten die Werte

$$(6)\qquad E = 1 + f'(u)^2, \qquad F = 0, \qquad G = u^2$$

$$(7)\qquad L = \frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{uf'(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}.$$

Hierin kennzeichnen die Gleichungen $F = 0$, $M = 0$ die Coordinaten-

linien als Krümmungscurven. Das Problem der Asymptotenlinien führt auf die Differentialgleichung

$$f''(u)du^2 + uf'(u)dv^2 = 0,$$

welche durch die Quadratur:

$$v = \pm\int\sqrt{\frac{-f''(u)}{uf'(u)}}\,du \tag{8}$$

gelöst wird. Man bemerkt, dass die in Rede stehenden Curven nur dann existiren, wenn die Meridiancurve gegen die Rotationsaxe convex ist.

§ 48.

Wir bleiben noch bei der Annahme stehen, dass die Coordinatenlinien mit den Asymptotencurven zusammenfallen, dass also die Gleichungen

$$L = 0, \qquad N = 0 \tag{1}$$

stattfinden. Alsdann wird

$$\eta = FM, \quad \vartheta = -EM, \quad \eta' = -GM, \quad \vartheta' = FM, \tag{2}$$
$$\eta - \vartheta' = 0,$$

mithin

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{M}{T^2}\left(F\frac{\partial x}{\partial u} - E\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{M}{T^2}\left(-G\frac{\partial x}{\partial u} + F\frac{\partial x}{\partial v}\right), \end{cases} \tag{3}$$

$$H = \frac{-2FM}{T^2} \tag{4}$$

$$K = \frac{-M^2}{T^2}, \tag{5}$$

woraus

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{\varrho_1} \\ \frac{1}{\varrho_2} \end{matrix}\right\} = \frac{M}{T^2}(-F \pm \sqrt{EG}). \tag{6}$$

Die Relation unter conjugirten Tangenten ist

$$\frac{dv}{du}\frac{\delta v}{\delta u} + \frac{\delta v}{\delta u} = 0, \tag{7}$$

und die Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$Edu^2 - Gdv^2 = 0$$

zerfällt in

$$\sqrt{E}\,du + \sqrt{G}\,dv = 0, \quad \sqrt{E}\,du - \sqrt{G}\,dv = 0. \tag{8}$$

Die zweite und dritte Fundamentalgleichung nehmen die Form an:

$$\frac{\partial M}{\partial u} - (J_1 - J_2')M = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial v} + (J_1' - J_2'')M = 0$$

oder

$$\frac{\partial \log M}{\partial u} = J_1 - J_2', \quad \frac{\partial \log M}{\partial v} = J_2'' - J_1'. \tag{9}$$

Hieraus könnte man durch Elimination von M eine Differentialgleichung zwischen den Fundamentalgrössen erster Ordnung ableiten. Und eine zweite würde sich mit Hilfe der Gauss'schen Relation ergeben, da diese in unserem Fall M als Function von E, F, G und ihren Ableitungen bestimmt.

Die Cartesischen Coordinaten genügen den linearen partiellen Differentialgleichungen [§ 28 (2, 5)]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} = J_1 \frac{\partial \chi}{\partial u} + J_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} = J_1'' \frac{\partial \chi}{\partial u} + J_2'' \frac{\partial \chi}{\partial v}. \end{cases} \tag{10}$$

Ein Specialfall der ersten ist bei den geradlinigen Flächen bereits benutzt worden.

Das Linienelement der Gauss'schen Kugel wird durch die Grössen

$$\mathfrak{E} = \frac{EM^2}{T^2}, \quad \mathfrak{F} = -\frac{FM^2}{T^2}, \quad \mathfrak{G} = \frac{GM^2}{T^2} \tag{11}$$

bestimmt, welche geben:

$$d\sigma^2 = \frac{M^2}{T^2}(Edu^2 - 2Fdudv + Gdv^2). \tag{12}$$

Endlich haben die Fundamentalgrössen 3. Ordnung die Werte:

$$P = -2MJ_2, \; Q = -2MJ_2', \; R = -2MJ_1', \; S = -2MJ_1''. \tag{13}$$

§ 49.

Im § 43 hat sich herausgestellt, dass die Mittelpunktsflächen 2. Grades und die Rotationsflächen durch ihre Krümmungslinien in unendlichkleine Quadrate geteilt werden. Man überzeugt sich leicht, dass diese Eigenschaft nicht allen Flächen zukommt; indes hat Gauss bewiesen, dass auf jeder gegebenen Fläche unendlich viele Systeme isometrischer Curven existiren. Nach der Definition solcher Curven müssen sie, als Coordinatenlinien $u' = \text{const.}$, $v' = \text{const.}$ angenommen, bewirken, dass

$$ds^2 = E'(du'^2 + dv'^2) \tag{1}$$

wird, oder dass unter den Fundamentalgrössen erster Ordnung die Gleichungen

$$E' = G', \qquad F' = 0 \tag{2}$$

gelten. Um das Gauss'sche Resultat abzuleiten, stellen wir von vornherein die Forderung, u', v' und E' der Gleichung

(3) $$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = E'(du'^2 + dv'^2)$$

entsprechend zu bestimmen. Diese Gleichung kann, wenn man die beiden wesentlich positiven quadratischen Formen links und rechts in ihre conjugirt complexen Factoren zerlegt, in der Form

4) $$\left[\sqrt{E}du + \frac{1}{\sqrt{E}}(F + i\sqrt{EG - F^2})dv\right]\left[\sqrt{E}du + \frac{1}{\sqrt{E}}(F - i\sqrt{EG - F^2})dv\right]$$
$$= E'(du' + idv')(du' - idv')$$

geschrieben werden. Angenommen nun, man hätte das Integral der Differentialgleichung

(5) $$\sqrt{E}du + \frac{1}{\sqrt{E}}(F + i\sqrt{EG - F^2})\,dv = 0$$

gefunden, in der Gestalt

$$U + iV = C,$$

wo C die Integrationsconstante, U und V reelle Functionen von u und v bezeichnen. Dann müssen die Gleichungen (5) und

$$dU + idV = 0$$

übereinstimmen, wenn man eine von ihnen noch mit einem Factor multiplicirt. Ist nämlich $\mu + \nu i$ der integrirende Factor von (5), so hat man identisch

$$(\mu + \nu i)\left[\sqrt{E}du + \frac{1}{\sqrt{E}}(F + i\sqrt{EG - F^2})\,dv\right] = dU + idV.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$(\mu - \nu i)\left[\sqrt{E}du + \frac{1}{\sqrt{E}}(F - i\sqrt{EG - F^2})\,dv\right] = dU - idV,$$

und durch Multiplication folgt eine Gleichung, welche mit (4) identisch wird, wenn man

$$u' = U, \quad v' = V, \quad E' = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}$$

setzt. (Die Annahme $u' = U$, $v' = -V$ bedeutet nur eine Veränderung in der Bezeichnungsweise.) Die Grössen μ und ν sind ursprünglich Functionen von u und v, während E' als Function von u' und v' zu denken ist. Ist aber die Integration von (5) geleistet und damit die functionale Beziehung zwischen u, v und u', v' gefunden, so kann man $\frac{1}{\mu^2 + \nu^2}$ in eine Function von u' und v' transformiren.

Die Auffindung zweier Schaaren von Linien, für welche $E' = G'$, $F' = 0$ wird, hängt hiernach ab von der Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades

(6) $$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = 0.$$

Angenommen nun, es sei auf irgend einem Wege ein zweites isometrisches Curvensystem gefunden, und es sei für dieses

$$ds^2 = E_1(du_1^2 + dv_1^2)$$

die Bestimmungsgleichung des Linienelements. Dann besteht also die Gleichung

$$E'(du'^2 + dv'^2) = E_1(du_1^2 + dv_1^2). \tag{7}$$

Die Grössen u_1, v_1 sind Functionen der ursprünglichen Coordinaten u, v, also auch Functionen von u' und v'. Setzen wir

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial u'}du' + \frac{\partial u_1}{\partial v'}dv', \quad dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u'}du' + \frac{\partial v_1}{\partial v'}dv',$$

so folgt aus (7):

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial u'}\right)^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial v'}\right)^2 = \frac{E'}{E_1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial u'}\frac{\partial u_1}{\partial v'} + \frac{\partial v_1}{\partial u'}\frac{\partial v_1}{\partial v'} = 0.$$

Die letzte Gleichung ist das Resultat der Elimination von α aus

$$\frac{\partial v_1}{\partial u'} = \alpha\frac{\partial u_1}{\partial u'}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial v'} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u_1}{\partial v'}.$$

Substituirt man diese Werte in die vorhergehende Relation, so ergibt sich

$$\frac{\partial u_1}{\partial v'} = \mp\alpha\frac{\partial u_1}{\partial u'} = \pm\frac{\partial v_1}{\partial u'}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial v'} = \mp\frac{\partial u_1}{\partial u'}.$$

Hieraus bilden wir

$$\frac{\partial(u_1 + iv_1)}{\partial v'} = \pm\frac{\partial(v_1 - iu_1)}{\partial u'} = \pm\frac{1}{i}\frac{\partial(iv_1 + u_1)}{\partial u'},$$

eine Gleichung, welche besagt, dass die Grösse

$$u_1 + iv_1 = \omega$$

als Function von u' und v' der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial\omega}{\partial u'} = \mp i\frac{\partial\omega}{\partial v'}$$

genügt. Ihr allgemeines Integral ist

$$\omega = \varphi(u' \mp iv')$$

für φ als eine willkürliche, jedoch selbstverständlich differentiirbare Function ihres Argumentes. Hiernach sind u_1 und v_1 notwendig solche Functionen von u' und v', wie sie sich aus der Gleichung

$$u_1 + iv_1 = \varphi(u' \mp iv') \tag{8}$$

durch Trennung des Reellen und Imaginären ergeben würden. Versteht man unter $\psi(u' \pm iv')$ die zu φ conjugirte Function, d. h. diejenige, welche aus jener dadurch hervorgeht, dass man überall (auch

in den, in φ etwa enthaltenen complexen Constanten) i mit $-i$ vertauscht, so kann man auch die Gleichung

$$u_1 - iv_1 = \psi(u' \pm iv') \tag{9}$$

hinzunehmen und u_1, v_1 aus (8) und (9) bestimmen. Dass umgekehrt, wenn in den Gleichungen

$$u_1 + iv_1 = \varphi(u' + iv'), \quad u_1 - iv_1 = \psi(u' - iv')$$

oder

$$u_1 + iv_1 = \varphi(u' - iv'), \quad u_1 - iv_1 = \psi(u' + iv')$$

unter φ eine beliebige Function verstanden wird, die Curven $u_1 =$ const., $v_1 =$ const. ein isometrisches System bilden, ergibt sich unmittelbar. Denn man erhält

$$du_1^2 + dv_1^2 = \varphi'(u' \pm iv')\,\psi'(u' \mp iv')\,(du'^2 + dv'^2),$$

oder, mit Hinzunahme von (1):

$$ds^2 = \frac{E'}{\varphi'\psi'}(du_1^2 + dv_1^2),$$

eine Gleichung, welche in der That das in Rede stehende Curvensystem als isometrisch kennzeichnet.

Es sind demnach schliesslich alle isometrischen Curvensysteme auf einer Fläche als bekannt anzusehen, wenn eines derselben gefunden ist.

§ 50.

Mit der Theorie der isometrischen Linien steht eine Abbildungsaufgabe in engem Zusammenhange. Sind zwei Flächen oder genauer zwei im Endlichen gelegene Flächenstücke einander derart zugeordnet, dass jedem Punkte des einen ein Punkt des anderen entspricht und umgekehrt, so sagt man, die beiden Flächenteile seien auf einander abgebildet. Man kann sich eine solche Abbildung am einfachsten dadurch vollzogen denken, dass man die Cartesischen Coordinaten beider Flächen als eindeutige Functionen derselben Variablen u, v darstellt. Es entsprechen sich alsdann die Punkte, welche demselben Wertepaar (u, v) zugehören. Die Abbildung heisst speciell eine conforme, wenn zwischen irgend zwei entsprechenden Curvenelementen ds und ds_1 die Gleichung

$$ds_1 = m\,ds \tag{1}$$

stattfindet, in welcher m eine Function von u und v bezeichnet. Sind E_1, F_1, G_1 die Fundamentalgrössen für die zweite Fläche, so gibt diese Relation:

$$E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2 = m^2(E du^2 + 2F du dv + G dv^2), \tag{2}$$

und es folgt weiter

$$E_1 = m^2 E, \quad F_1 = m^2 F, \quad G_1 = m^2 G. \tag{3}$$

Bei der conformen Abbildung sind die Winkel entsprechender Linienelemente einander gleich. Dies ergibt sich aus den Gleichungen § 4 (6, 8, 9), welche lehren, dass die trigonometrischen Functionen eines Winkels zweier Richtungen nur von den Verhältnissen der Fundamentalgrössen erster Ordnung abhängen, sich also nicht ändern, wenn man E, F, G mit einer und derselben Grösse multiplicirt. — Nimmt man auf den beiden Flächen zwei entsprechende unendlich kleine Dreiecke an, so kann man, wenn von der Veränderung von m in diesem Dreiecke abgesehen wird, sagen, dass ihre homologen Seiten einander proportional sind. Aus diesem Grunde bedient man sich für zwei, durch conforme Abbildung auf einander bezogene Flächen auch des Ausdruckes, sie seien in den kleinsten Teilen ähnlich.

Wird die Grösse m constant, $= 1$ angenommen, so geht die conforme Abbildung in die Abwickelung (§ 27) über.

Es sei jetzt die zweite Fläche speciell eine Ebene. Dann kann man setzen

$$ds_1^2 = du'^2 + dv'^2$$

wenn unter u', v' rechtwinklige Cartesische Coordinaten verstanden werden, und die Gleichung $ds_1 = m ds$ oder $ds = m' ds_1$ liefert

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = m'^2 (du'^2 + dv'^2). \tag{4}$$

Dieser Gleichung gemäss ist die functionale Beziehung zwischen u, v, u', v' zu bestimmen. Die Form von (4) lehrt in Verbindung mit § 49 (1), dass die Aufgabe, ein System isometrischer Curven zu finden, mit dem Problem der conformen Abbildung der gegebenen Fläche auf eine Ebene identisch ist. In Folge dessen werden die Grössen u', v', für welche $E' = G'$, $F' = 0$ ist, auch als Abbildungsparameter bezeichnet.

Liegt die Aufgabe vor, zwei krumme Flächen conform auf einander abzubilden, d. h. $\bar{u}$, $\bar{v}$ als Functionen von u, v so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$\bar{E}d\bar{u}^2 + 2\bar{F}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}d\bar{v}^2 = m^2 (Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2)$$

stattfindet, so bilde man beide Flächen zunächst auf die Ebene ab. Dies geschieht durch Aufstellung der Gleichungen

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = m'^2 (du'^2 + dv'^2)$$

$$\bar{E}d\bar{u}^2 + 2\bar{F}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}d\bar{v}^2 = m_1^2 (du_1^2 + dv_1^2),$$

deren jede die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades voraussetzt. Sind u', v' als Functionen von u

und v, u_1 und v_1 als Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ gefunden, so ist zur Lösung der gestellten Aufgabe noch die Gleichung

$$m_1^2(du_1^2 + dv_1^2) = m^2 m'^2 (du'^2 + dv'^2)$$

zu erfüllen, was nach § 49 in der allgemeinsten Weise dadurch geschieht, dass man $u_1 + iv_1$ gleich einer willkürlichen Function des complexen Argumentes $u' \pm iv'$ setzt. Hierdurch wird schliesslich die gesuchte Beziehung zwischen u, v und $\bar{u}$, $\bar{v}$ geliefert.

§ 51.

Als Beispiel für die Auseinandersetzung des letzten Paragraphen diene die conforme Abbildung eines Rotationsellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

auf eine Ebene, und zwar unter der Voraussetzung, dass, abweichend von der gewöhnlichen Darstellung einer Rotationsfläche [§ 19 (5)], die Coordinaten durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v \\ y = a \sin u \sin v \\ z = c \cos u \end{cases} \tag{2}$$

gegeben sind. Aus (2) folgt:

$$E = a^2 \cos^2 u + c^2 \sin^2 u, \quad F = 0, \quad G = a^2 \sin^2 u, \tag{3}$$

und die nach § 49 (5) zu integrirende Differentialgleichung wird

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \bar{u} + c^2 \sin^2 \bar{u}}\, du + ai \sin u\, dv = 0$$

oder

$$\sqrt{\operatorname{ctg}^2 u + \frac{c^2}{a^2}}\, du + i dv = 0. \tag{4}$$

Setzt man hierin

$$\frac{c}{a} = e, \tag{5}$$

$$\operatorname{ctg} u = e \operatorname{ctg} w, \tag{6}$$

so wird (4) transformirt in

$$\frac{e^2 dw}{\sin w \sqrt{1 - (1 - e^2)\cos^2 w}} + i dv = 0. \tag{7}$$

Hierin kann noch, wenn $c < a$, also das Ellipsoid ein abgeplattetes ist,

$$1 - e^2 = \varepsilon^2,$$

ferner

$$\frac{1}{\sin w(1 - \varepsilon^2 \cos^2 w)} = \frac{A}{\sin w} + \frac{B \sin w}{1 - \varepsilon \cos w} + \frac{C \sin w}{1 + \varepsilon \cos w}$$

gesetzt werden, und die Bestimmung von A, B, C liefert:

$$A = \frac{1}{1-\varepsilon^2}, \qquad B = C = -\frac{\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)}.$$

Daher folgt als Integral von (7):

$$\log \operatorname{ctg} \frac{w}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \log \frac{1-\varepsilon\cos w}{1+\varepsilon\cos w} - iv = C'. \tag{8}$$

Nimmt man mithin

$$u' = \log\left\{\operatorname{ctg}\frac{w}{2} \cdot \left(\frac{1-\varepsilon\cos w}{1+\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}, \quad v' = v, \tag{9}$$

wo in die erste Gleichung noch u für w vermöge (6) einzuführen ist, so geben die Gleichungen $u' = \text{const.}$, $v' = \text{const.}$ ein System isometrischer Curven, für welche direct $E' = G'$ wird (cf. § 43).

Ist das Rotationsellipsoid ein verlängertes, also $c > a$, $e > 1$, so werde in (7)

$$e^2 - 1 = \eta^2, \tag{10}$$

ferner

$$\frac{1}{\sin w(1+\eta^2\cos^2 w)} = \frac{A}{\sin w} + \frac{B\sin w}{1+\eta^2\cos^2 w}$$

gesetzt, wobei

$$A = \frac{1}{1+\eta^2}, \quad B = \frac{\eta^2}{1+\eta^2}$$

zu nehmen ist. Dann wird das Integral:

$$\log \operatorname{ctg}\frac{w}{2} + \eta \operatorname{arctg}(\eta\cos w) - iv = C''. \tag{11}$$

Für diesen Fall ist mithin

$$u' = \log \operatorname{ctg}\frac{w}{2} + \eta \operatorname{arctg}(\eta\cos w), \qquad v' = v \tag{12}$$

zu setzen, um der Bedingung $E' = G'$ zu genügen.

Geht das Rotationsellipsoid in eine Kugel über, so wird $c = a$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, und (9), (12) geben übereinstimmend

$$u' = \log \operatorname{ctg}\frac{u}{2}, \quad v' = v, \tag{13}$$

was auch leicht direct aus den Gleichungen (2) für $c = a$ gefunden wird. Denn man erhält

$$E = a^2, \qquad F = 0, \qquad G = a^2\sin^2 u, \tag{14}$$

und die zu integrirende Differentialgleichung wird

$$\frac{du}{\sin u} + i\,dv = 0$$

mit dem Integral

$$\log \operatorname{ctg}\frac{u}{2} - iv = C.$$

Transformiren wir in diesem Fall das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = a^2 (du^2 + \sin^2 u \, dv^2) \tag{15}$$

durch Einführung der Variablen (13), so folgt

$$ds^2 = \frac{4a^2 e^{2u'}}{(1 + e^{2u'})^2} (du'^2 + dv'^2). \tag{16}$$

Die Linien $v' = \text{const.}$, $u' = \text{const.}$ liefern auf der Kugel Meridiane und Parallelkreise, in der Ebene Parallelen zu den beiden Coordinatenaxen. Daher correspondiren jenen Kreisen bei der Abbildung zwei Schaaren paralleler gerader Linien, welche aufeinander senkrecht stehen. Dies entspricht der Mercator'schen Projection.

Wir wenden ferner in der Ebene Polarcoordinaten an, indem wir

$$u' = r \cos \psi, \qquad v' = r \sin \psi$$

setzen. Dann wird

$$ds_1^2 = du'^2 + dv'^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2,$$

oder, wenn noch $\frac{dr}{r} = dr'$, $r = e^{r'}$ genommen wird,

$$ds_1^2 = e^{2r'} (dr'^2 + d\psi^2).$$

Dieser Ausdruck lässt in Evidenz treten, dass auch die Linien $\psi = \text{const.}$ und $r' = \text{const.}$ oder $r = \text{const.}$ die Ebene in unendlich kleine Quadrate teilen. Die Beziehung zwischen den beiden isometrischen Systemen [§ 49 (8)] wird hier durch die Gleichung

$$r' + i\psi' = \log (u' + iv')$$

vermittelt.

Setzt man nun in der Gleichung (16) r' für u', ψ für v' und geht von r' zu r zurück, so erhält man

$$ds^2 = \frac{4a^2}{(1 + r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\psi^2); \tag{17}$$

ein Ausdruck, welcher auch aus (15) sofort abgeleitet wird, wenn man

$$v = \psi, \quad \frac{du}{\sin u} = \frac{dr}{r} \quad \text{oder} \quad r = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

nimmt. Er entspricht der stereographischen Projection. Denn die Meridiane transformiren sich hier in gerade Linien, welche durch einen und denselben Punkt, den Pol des Coordinatensystems, hindurchgehen, und die Parallelkreise in concentrische Kreise, deren Mittelpunkt der Pol ist.

§ 52.

Für die Isometrie der Coordinatenlinien sind nach der ursprünglichen Definition isometrischer Curven die Bedingungen $E = G$, $F = 0$

hinreichend. Notwendig ist jedoch nur, dass bei passender Wahl der Grössen, welche zur Darstellung der beiden Curvenschaaren verwandt werden, $ds' = ds''$ erhalten wird. Die Beispiele des § 43 können zur Erläuterung dieses Umstandes dienen. Es werde jetzt allgemein gesetzt

$$u = f(u'), \qquad v = g(v'), \tag{1}$$

wo f und g innerhalb eines gewissen Bereiches eindeutige und eindeutig umkehrbare Functionen bezeichnen; wie bereits öfter bemerkt, wird hierdurch die Natur der Curvenschaaren als solcher nicht geändert. Es seien E^*, F^*, G^* die Werte, welche E, F, G vermöge der Transformation annehmen; dann ist

$$ds^2 = E^* f'(u')^2 du'^2 + 2F^* f'(u') g'(v') du' dv' + G^* g'(v')^2 dv'^2.$$

Für die Orthogonalität bleibt die Bedingung $F^* = 0$ oder $F = 0$ bestehen. Ferner wird

$$ds' = \sqrt{E^*} f'(u') du', \qquad ds'' = \sqrt{G^*} g'(v') dv';$$

sollen diese Werte für $du' = dv'$ einander gleich werden, so muss sein

$$\sqrt{E^*} f'(u') = \sqrt{G^*} g'(v')$$

oder

$$\frac{E^*}{G^*} = \frac{g'(v')^2}{f'(u')^2}.$$

In diese Gleichung führen wir vermöge (1) wieder die Variablen u, v ein; dann erhält sie die Form

$$\frac{E}{G} = \frac{\psi(v)}{\varphi(u)},$$

woraus durch Elimination von ψ und φ

$$\frac{\partial^2 \log \frac{E}{G}}{\partial u \partial v} = 0 \tag{2}$$

folgt. Wird umgekehrt das Bestehen dieser Gleichung unter den Fundamentalgrössen vorausgesetzt, so ergibt sich durch Integration

$$\log \frac{E}{G} = 2\omega(v) - 2\chi(u).$$

Führt man nun Grössen u', v' durch die Gleichungen

$$\frac{du}{du'} = e^{\chi(u)}, \qquad \frac{dv}{dv'} = e^{\omega(v)}$$

oder

$$u' = \int e^{-\chi(u)} du, \qquad v' = \int e^{-\omega(v)} dv$$

ein und substituirt in

$$ds' = \sqrt{E}\, du, \qquad ds'' = \sqrt{G}\, dv,$$

so erhält man für $dv' = du'$:

$$\frac{ds'}{ds''} = \frac{\sqrt{E}\, e^{\chi(u)}}{\sqrt{G}\, e^{\omega(v)}}.$$

Dieser Ausdruck ist aber $= 1$, wegen

$$\frac{E}{G} = e^{2\omega(v) - 2\chi(u)};$$

mithin $ds' = ds''$. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Isometrie der Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sind also die Gleichung (2) und $F = 0$.

Sind nun für eine gegebene Fläche die Coordinatenlinien isometrisch, so denken wir uns die Transformation (1) bereits ausgeführt und für u', v' wieder u, v geschrieben, sodass die Gleichungen

$$E = G, \qquad F = 0 \tag{3}$$

gelten. Um die Vereinfachungen zu übersehen, welche alsdann für die flächentheoretischen Formeln eintreten, hat man im § 37 überall $G = E$ zu setzen.

Dann erhalten speciell die Grössen J die Werte:

$$\begin{cases} J_1 = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}, & J_1' = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}, & J_1'' = -\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u} \\ J_2 = -\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}, & J_2' = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}, & J_2'' = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}, \end{cases} \tag{4}$$

mithin ist

$$\begin{cases} J_1 = J_2' = -J_1'' \\ J_2'' = J_1' = -J_2. \end{cases} \tag{5}$$

Ausserdem ist besonders die Gauss'sche Relation bemerkenswert, welche sich in die Form setzen lässt:

$$LN - M^2 = -\frac{E}{2}\left(\frac{\partial^2 \log E}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log E}{\partial v^2}\right). \tag{6}$$

Die beiden anderen Fundamentalgleichungen [§ 28 (21, 22)] werden:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} - (L + N) J_1' = 0, \\ \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} - (L + N) J_2' = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Im Uebrigen liefern die Formeln des § 37:

$$\begin{cases} \eta = -EL, \quad \vartheta = -EM, \quad \eta' = -EM, \\ \vartheta' = -EN, \quad \vartheta - \eta' = 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{1}{E}\left(L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{1}{E}\left(M\frac{\partial x}{\partial u} + N\frac{\partial x}{\partial v}\right), \end{cases} \tag{9}$$

ferner

$$H = \frac{L + N}{E} \tag{10}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{E^2}, \tag{11}$$

und als Differentialgleichung der Krümmungscurven:

$$Mdu^2 + (N - L)dudv - Mdv^2 = 0, \tag{12}$$

während nach § 25 (8) das Linienelement der Gauss'schen Kugel durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{E} = \frac{1}{E}(L^2 + M^2) \\ \mathfrak{F} = \frac{1}{E}(L + N)M \\ \mathfrak{G} = \frac{1}{E}(M^2 + N^2), \end{cases} \tag{13}$$

$$d\sigma^2 = \frac{1}{E}[(Ldu + Mdv)^2 + (Mdu + Ndv)^2] \tag{14}$$

bestimmt wird.

§ 53.

Wir gehen jetzt zu der Aufgabe über, die Differentialgleichung der kürzesten Linie zu finden, welche sich zwischen zwei gegebenen Punkten auf einer gegebenen Fläche ziehen lässt. Längs dieser Curve sind x, y, z als Functionen einer unabhängigen Variablen t zu denken, welche alle Werte eines Intervalles $t_0 \ldots t_1$, und jeden nur einmal annimmt; t_0 und t_1 entsprechen den beiden Endpunkten A_0 und A_1 der gesuchten Curve. Der gestellten Aufgabe gemäss sind x, y, z als Functionen von t so zu bestimmen, dass die Bogenlänge

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

ein Minimum wird. Es sei nun zwischen A_0 und A_1 ausser der gesuchten noch eine zweite Curve angenommen, deren Punkte die Coordinaten $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ haben sollen und deren Bogenlänge mit S bezeichnet sei. Soll s ein Minimum sein, so muss

$$S > s$$

werden, welche Werte man auch den Grössen ξ, η, ζ erteilen möge. Von diesen Grössen, welche allgemein ebenfalls als Functionen von t zu betrachten sind, kann dabei von vornherein angenommen werden, dass sie (ebenso wie ihre Ableitungen) dem absoluten Betrage nach beliebig klein sind. Um nun $S - s$ zu finden, bilden wir zunächst

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{d(x+\xi)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(y+\eta)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(z+\zeta)}{dt}\right)^2}\, dt$$

und entwickeln die Quadratwurzel unter dem Integralzeichen nach Potenzen von $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$. Der Ausdruck, in welchem diese Grössen linear vorkommen, ist

$$\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\zeta}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}},$$

wofür, da $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ ist, abgekürzt geschrieben werden kann: $\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{dt}$. Das Integral dieses Ausdruckes bildet das Anfangsglied von $S - s$ und muss gleich Null sein, wenn diese Differenz bei allen Annahmen über ξ, η, ζ positiv sein soll. Ob sie wirklich positiv wird, hängt von dem Zeichen des Integrals ab, welches aus den Gliedern zweiter Ordnung in $\frac{d\xi}{dt}$ etc. entspringt, falls dieses nicht etwa gleichzeitig mit dem ersten verschwindet. Wir erhalten daher als notwendige, aber im Allgemeinen nicht hinreichende Bedingung:

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{dt}\right) dt = 0.$$

Zerlegen wir das Integral in drei Teile und wenden auf den ersten partielle Integration an, so ergibt sich:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{dt}\, dt = \left[\xi \frac{dx}{ds}\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \xi \frac{d\frac{dx}{ds}}{dt}\, dt.$$

Nun müssen die Grössen ξ, η, ζ für die Werte t_0 und t_1 verschwinden, da die Endpunkte A_0, A_1 für die zweite Curve dieselben sind wie für die erste. Der erste Teil fällt also fort, und es folgt aus (1):

$$(2) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left(\xi \frac{d\frac{dx}{ds}}{dt} + \eta \frac{d\frac{dy}{ds}}{dt} + \zeta \frac{d\frac{dz}{ds}}{dt}\right) dt = 0.$$

Hierin sind die Grössen ξ, η, ζ noch an die Bedingung gebunden, dass die Punkte $(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$ auf der gegebenen Fläche

$$F(x, y, z) = 0$$

liegen müssen. Dies gibt

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta = 0.$$

Entnimmt man aus (3) etwa den Wert von ξ und substituirt ihn in (2), so kann diese Gleichung nur dadurch bestehen, dass die Coefficienten der nunmehr (innerhalb gewisser Grenzen) vollkommen willkürlichen Grössen ξ, η einzeln verschwinden. Man bemerkt leicht, dass die entstehenden Relationen sich bei Einführung eines unbestimmten Factors μ in die Form setzen lassen:

$$(4) \qquad d\frac{\frac{dx}{ds}}{dt} = \mu \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad d\frac{\frac{dy}{ds}}{dt} = \mu \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad d\frac{\frac{dz}{ds}}{dt} = \mu \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Diese Gleichungen sind, wie leicht ersichtlich, einer unabhängigen äquivalent. Sie kann dadurch gefunden werden, dass man (4) der Reihe nach mit a, b, c (cf. § 9) multiplicirt und addirt; dann ergibt sich

$$(5) \qquad a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + c\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

oder ausgeschrieben

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Da a, b, c den Richtungscosinus der Binormale der kürzesten Linie, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ den Richtungscosinus der Flächennormale proportional sind, so besagt das gefundene Resultat, dass diese beiden Geraden längs der ganzen Curve auf einander senkrecht stehen, oder dass die Schmiegungsebene der kürzesten Linie überall durch die Normale der Fläche hindurchgeht. Diese Bedingung ist aber, falls die Punkte A_0, A_1 nicht genügend nahe liegen, im Allgemeinen ebensowenig hinreichend für die Charakterisirung der kürzesten Linie wie die Gleichung (1), aus welcher sie abgeleitet wurde. In Folge dessen sollen die Curven, für welche nur die eben angegebene geometrische Eigenschaft besteht, als geodätische Linien von den kürzesten unterschieden werden.

Ist $z = \varphi(x, y)$ die Gleichung der Fläche, so ergibt sich aus (5) sofort

$$(7) \qquad ap + bq - c = 0$$

als Differentialgleichung der geodätischen Linien. Einer weitläufigeren Rechnung bedarf es, um die letztere für den Fall zu erhalten, dass x, y, z als Functionen von u und v gegeben sind. Es wird zunächst

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist [§ 11 (7, 8)]

$$Ydz - Zdy = \frac{1}{T}\left\{\left(-F\frac{\partial x}{\partial u} + E\frac{\partial x}{\partial v}\right)du + \left(-G\frac{\partial x}{\partial u} + F\frac{\partial x}{\partial v}\right)dv\right\}$$
$$= \frac{1}{T}\left\{(Edu + Fdv)\frac{\partial x}{\partial v} - (Fdu + Gdv)\frac{\partial x}{\partial u}\right\}$$

etc., ferner

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}dudv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u}d^2u + \frac{\partial x}{\partial v}d^2v$$

etc.; daher folgt aus (8) [cf. § 27 (1, 2)]:

$$(Edu + Fdv)(ndu^2 + 2n'dudv + n''dv^2 + Fd^2u + Gd^2v)$$
$$- (Fdu + Gdv)(mdu^2 + 2m'dudv + m''dv^2 + Ed^2u + Fd^2v) = 0,$$

oder, wenn man für $m, \ldots n''$ ihre Werte [§ 27 (4, 5)] einsetzt,

$$(9) \quad (Edu + Fdv)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)du^2 + \frac{\partial G}{\partial u}dudv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2\right]$$
$$- (Fdu + Gdv)\left[\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + \frac{\partial E}{\partial v}dudv + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2\right]$$
$$+ (EG - F^2)(dud^2v - dvd^2u) = 0.$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung der geodätischen Linien. Ihre Integration für eine gegebene Fläche führt zwei willkürliche Constanten ein, deren eine durch Angabe eines Punktes bestimmt werden kann, welcher auf der Curve liegen soll. Durch den Punkt gehen unendlich viele geodätische Linien; fixirt man noch die Richtung für eine von ihnen, so dient diese Festsetzung im Allgemeinen zur Bestimmung der zweiten Integrationsconstante.

Werden in (9) die Ableitungen von E, F, G durch die Grössen J [§ 28 (3, 6, 7)] ersetzt, so transformirt sich die Differentialgleichung in

$$(10) \quad (J_2du^2 + 2J_2'dudv + J_2''dv^2)du - (J_1du^2 + 2J_1'dudv + J_1''dv^2)dv$$
$$+ dud^2v - dvd^2u = 0.$$

§ 54.

Man kann die Gleichung (9) des vorigen Paragraphen auch dadurch finden, dass man direct die notwendige Bedingung für das Minimum des Integrales

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

ableitet. Der Einfachheit der Rechnung wegen nehmen wir dabei

$$t = u$$

an, betrachten also längs der geodätischen Linie v als eine, noch zu bestimmende Function von u. Das zu untersuchende Integral nimmt dann die Form an

$$s = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du.$$

Es sei jetzt $v + \omega$ für eine zweite, der gesuchten beliebig nahe Curve diejenige Function von u, welche dem v für die erste Curve entspricht. Denkt man sich diese Function in E, F, G eingeführt, so geht z. B. E in $E + \frac{\partial E}{\partial v}\omega + \cdots$ über. Bezeichnet man nun wieder mit S die Bogenlänge der zweiten Curve und bildet das Anfangsglied der Differenz $S - s$, indem man die Wurzelgrösse unter dem Integral für S nach Potenzen von ω und $\frac{d\omega}{du}$ entwickelt und bei den Gliedern stehen bleibt, welche diese Grössen in der ersten Dimension enthalten, so ergibt sich das Integral

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{\left[\frac{\partial E}{\partial v} + 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{du} + \frac{\partial G}{\partial v}\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]\omega + \left(2F + 2G\frac{dv}{du}\right)\frac{d\omega}{du}}{2\sqrt{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}}\, du,$$

welches Null sein muss. Da

$$\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = ds$$

ist, so kann man schreiben

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial v}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v}du dv + \frac{\partial G}{\partial v}dv^2\right)\omega + 2(F du + G dv)\, d\omega}{2 ds} = 0.$$

Wendet man auf den Teil dieses Integrals, welcher $d\omega$ enthält, partielle Integration an, so wird

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{F du + G dv}{ds}\, d\omega = \left[\frac{F du + G dv}{ds}\right]_{u_0}^{u_1} - \int_{u_0}^{u_1} \omega \cdot d\frac{F du + G dv}{ds}.$$

Hier verschwindet das vom Integralzeichen freie Glied der rechten Seite, weil bei der ausgeführten Variation der Curve die Endpunkte fest bleiben, ω also für $u = u_0$ und $u = u_1$ gleich Null sein muss. Die gefundene Gleichung geht über in

$$\int_{u_0}^{u_1}\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial v}du^2+2\frac{\partial F}{\partial v}dudv+\frac{\partial G}{\partial v}dv^2}{2ds}-d\frac{Fdu+Gdv}{ds}\right)\omega=0.$$

Da nun ω innerhalb gewisser Grenzen willkürlich ist, so muss sein Coefficient verschwinden, wenn das Integral Null sein soll, und man erhält die Differentialgleichung der geodätischen Linien in der Form

$$(1)\qquad \frac{\partial E}{\partial v}du^2+2\frac{\partial F}{\partial v}dudv+\frac{\partial G}{\partial v}dv^2=2ds\,.\,d\frac{Fdu+Gdv}{ds},$$

welche entwickelt wieder in die Gleichung § 53 (9) übergeht. Vertauscht man in der ganzen Rechnung u und v, so ergibt sich

$$(2)\qquad \frac{\partial E}{\partial u}du^2+2\frac{\partial F}{\partial u}dudv+\frac{\partial G}{\partial u}dv^2=2ds\,.\,d\frac{Edu+Fdv}{ds}.$$

Es ist zweckmässig, in diese Gleichungen die Winkel einzuführen, welche die geodätische Linie mit den Coordinatenlinien bildet. Ist z. B. w der durch Drehung in positivem Sinne erhaltene Winkel, welchen die gesuchte Curve mit der positiven u-Linie einschliesst, so hat man nach § 4 (7):

$$(3)\qquad \cos w=\frac{Edu+Fdv}{\sqrt{E}\,ds}$$

$$(4)\qquad \sin w=\frac{\sqrt{EG-F^2}\,dv}{\sqrt{E}\,ds}.$$

Combinirt man diese Gleichungen mit (2), so folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial u}du^2+2\frac{\partial F}{\partial u}dudv+\frac{\partial G}{\partial u}dv^2&=2ds\,.\,d(\sqrt{E}\cos w)\\&=\frac{dsdE\,.\,\cos w}{\sqrt{E}}-2ds\sqrt{E}\sin w dw\\&=\frac{(Edu+Fdv)dE}{E}-2\sqrt{EG-F^2}\,dvdw\\&=\frac{Edu+Fdv}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial u}du+\frac{\partial E}{\partial v}dv\right)-2\sqrt{EG-F^2}\,dvdw,\end{aligned}$$

und hieraus schliesslich

$$\begin{aligned}(5)\qquad \sqrt{EG-F^2}\,dw&=\frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}du+\frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}dv+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du\\&\quad-\frac{\partial F}{\partial u}du-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv\end{aligned}$$

oder auch

$$(6)\qquad \sqrt{EG-F^2}\,dw=\frac{1}{2}\frac{F}{E}dE+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du-\frac{\partial F}{\partial u}du-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv.$$

Aus (3) und (4) ergibt sich noch

$$(7)\qquad \operatorname{ctg} w=\frac{E}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{du}{dv}+\frac{F}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Würde man aus (5) und (7) w eliminiren, so erhielte man wiederum die Gleichung § 53 (9).

Bei Einführung der Grössen J [§ 28 (18)] lässt die Formel (5) sich schreiben:

$$\frac{E}{T}\,dw = -\,(J_2 du + J_2' dv). \tag{8}$$

§ 55.

Bevor allgemeine Sätze aus der Theorie der geodätischen Linien entwickelt werden, sollen die Gleichungen dieser Curven für specielle Flächen aufgestellt werden.

1) Es sei eine Kugel gegeben durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien wird [§ 53 (6)]:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicirt man die zweite und dritte Colonne dieser Determinante mit den willkürlichen Constanten C und C' und addirt sie zur ersten, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x + Cy + C'z, & y, & z \\ dx + Cdy + C'dz, & dy, & dz \\ d^2x + Cd^2y + C'd^2z, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

welche durch

$$x + Cy + C'z = 0$$

befriedigt wird. Diese, durch den Mittelpunkt der Kugel hindurchgehende Ebene bestimmt auf der Fläche die geodätische Linie. Man erhält also das bekannte Resultat, dass die gesuchte Curve ein Hauptkreis der Kugel ist. Denkt man sich die Constanten C, C' durch Angabe zweier Punkte A_0, A_1 bestimmt, zwischen denen sich die Curve erstrecken soll, so ist natürlich nur der eine der beiden Bogen A_0A_1 der kürzeste Weg zwischen diesen beiden Punkten.

2) Die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoids ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

die Differentialgleichung seiner geodätischen Linien

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$(1)\qquad \left(\frac{y}{b^2}d^2z - \frac{z}{c^2}d^2y\right)dx + \left(\frac{z}{c^2}d^2x - \frac{x}{a^2}d^2z\right)dy + \left(\frac{x}{a^2}d^2y - \frac{y}{b^2}d^2x\right)dz = 0.$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe des ersten und zweiten Differentials der Flächengleichung:

$$(2)\qquad \frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy + \frac{z}{c^2}dz = 0$$

$$(3)\qquad \frac{x}{a^2}d^2x + \frac{y}{b^2}d^2y + \frac{z}{c^2}d^2z + \frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} = 0$$

umgeformt werden. Bezeichnet λ einen Proportionalitätsfactor, so folgt aus (1) und (2):

$$\lambda dx = \left(\frac{z}{c^2}d^2x - \frac{x}{a^2}d^2z\right)\frac{z}{c^2} - \left(\frac{x}{a^2}d^2y - \frac{y}{b^2}d^2x\right)\frac{y}{b^2}$$
$$= \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)d^2x - \left(\frac{x}{a^2}d^2x + \frac{y}{b^2}d^2y + \frac{z}{c^2}d^2z\right)\frac{x}{a^2},$$

und zwei ähnliche Ausdrücke für λdy, λdz. Es werde noch zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = U$$
$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} = V;$$

dann ergibt sich mit Benutzung von (3):

$$\lambda dx = Ud^2x + V\frac{x}{a^2}$$
$$\lambda dy = Ud^2y + V\frac{y}{b^2}$$
$$\lambda dz = Ud^2z + V\frac{z}{c^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit dx, dy, dz, dann mit $\frac{dx}{a^2}$, $\frac{dy}{b^2}$, $\frac{dz}{c^2}$ und addirt, so wird

$$(4)\qquad \lambda ds^2 = Uds\,d^2s$$

$$(5)\qquad \lambda V = \frac{1}{2}(UdV + VdU).$$

Bei Elimination von λ aus (4) und (5) wird die Differentialgleichung (1) in veränderter Form wieder erhalten. Es folgt

$$(6)\qquad 2\frac{d^2s}{ds} = \frac{dU}{U} + \frac{dV}{V},$$

und nach ausgeführter Integration:

$$Ads^2 = UV$$

für A als willkürliche Constante. Setzt man für U und V ihre Werte ein, so wird das erste Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linien:

$$(7) \quad A(dx^2+dy^2+dz^2)=\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\left(\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}\right).$$

Diese Relation, welche, beiläufig bemerkt, auch für die Krümmungscurven gilt, hat eine einfache geometrische Bedeutung. Um zunächst den geometrischen Ausdruck des ersten Factors der rechten Seite zu finden, denken wir uns im Punkte $(x\,y\,z)$ die Tangentialebene an das Ellipsoid gelegt. Ihre Gleichung ist

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}=1.$$

Bringt man sie auf die Form

$$x'\cos\alpha'+y'\cos\beta'+z'\cos\gamma'=p,$$

in welcher p den Abstand der Ebene vom Anfangspunkt der Coordinaten, α', β', γ' die Richtungswinkel von p bezeichnen, so ergibt sich durch Vergleichung:

$$\frac{\cos\alpha'}{p}=\frac{x}{a^2},\quad \frac{\cos\beta'}{p}=\frac{y}{b^2},\quad \frac{\cos\gamma'}{p}=\frac{z}{c^2},$$

woraus

$$\frac{1}{p^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}.$$

Es seien ferner α, β, γ die Richtungswinkel der vom Punkte (x, y, z) nach dem Punkte $(x+dx, y+dy, z+dz)$ gehenden Flächentangente, welche zugleich Tangente der betrachteten Curve sein soll. Dann sind dx, dy, dz dieselben Grössen wie in (7), und man hat

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta,\quad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma.$$

Daher geht (7) über in:

$$A=\frac{1}{p^2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right).$$

Endlich bezeichne d den Halbmesser des Ellipsoids, dessen Richtungswinkel α, β, γ sind, so sind die Coordinaten seines Endpunktes $d\,.\cos\alpha$, $d\,.\cos\beta$, $d\,.\cos\gamma$; und da diese Coordinaten der Gleichung des Ellipsoids genügen, so wird

$$d^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)=1.$$

Demnach erhält man schliesslich aus (7):

$$p^2d^2=\frac{1}{A}$$

oder

$$(8) \qquad pd=\text{const.}$$

Dies gibt also folgendes Resultat: Legt man in irgend einem Punkte einer geodätischen Linie (oder Krümmungscurve) des Ellipsoids eine Tangentialebene an die Fläche und construirt ausserdem den Halbmesser des Ellipsoids, welcher der Tangente in demselben Punkte der Curve parallel ist, so ist das Product dieses Halbmessers mit dem Abstande der Tangentialebene vom Mittelpunkte längs der ganzen Curve constant.

Man kann die Gleichung (7) noch einmal integriren, wenn man sie nach Jacobi durch Einführung der elliptischen Coordinaten transformirt. Zunächst folgt durch logarithmische Differentiation der Gleichungen § 42 (14):

$$dx = -\frac{x}{2}\left(\frac{du}{a^2-u}+\frac{dv}{a^2-v}\right),\ldots$$

Setzt man diese Werte in die Differentialausdrücke ein, welche in (7) vorkommen, so folgt durch eine leichte Rechnung, in welcher die Relationen

$$\frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{b^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\frac{c^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=0$$

$$\frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{b^4}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\frac{c^4}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=1$$

$$\frac{(b^2+c^2)a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{(c^2+a^2)b^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\frac{(a^2+b^2)c^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}=0$$

gebraucht werden:

$$dx^2+dy^2+dz^2=\frac{u-v}{4}\left(\frac{u\,du^2}{U}-\frac{v\,dv^2}{V}\right) \tag{9}$$

$$\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}=\frac{u-v}{4}\left(\frac{du^2}{U}-\frac{dv^2}{V}\right), \tag{10}$$

worin zur Abkürzung

$$\begin{cases} U=(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u) \\ V=(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v) \end{cases} \tag{11}$$

gesetzt ist. Ferner wird

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{uv}{a^2b^2c^2}. \tag{12}$$

Substituirt man (9, 10, 12) in (7) und führt noch an Stelle von A eine neue Constante C durch die Gleichung

$$A=\frac{C}{a^2b^2c^2}$$

ein, so ergibt sich

$$C\frac{u-v}{4}\left(\frac{u\,du^2}{U}-\frac{v\,dv^2}{V}\right)=uv\,\frac{u-v}{4}\left(\frac{du^2}{U}-\frac{dv^2}{V}\right)$$

oder

$$\frac{u\,du^2}{(C-u)U}=\frac{v\,dv^2}{(C-v)V}. \tag{13}$$

Hier sind die Variablen getrennt. Setzt man für U und V ihre Werte wieder ein und integrirt, so erhält man als Gleichung der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid

$$\int \frac{\sqrt{u}\,du}{\sqrt{(C-u)(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}} = \int \frac{\pm\sqrt{v}\,dv}{\sqrt{(C-v)(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}} + C'. \tag{14}$$

Das Problem der Aufsuchung dieser Curven ist damit auf Quadraturen, und zwar auf die Ausführung hyperelliptischer Integrale zurückgeführt. Ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, so reduciren sich, wie im nächsten Paragraphen auf anderem Wege gezeigt werden soll, die Integrale auf elliptische.

§ 56.

Es seien jetzt die geodätischen Linien für eine beliebige Rotationsfläche zu ermitteln, deren Gleichung ist

$$z - f(u) = 0 \tag{1}$$

für $u^2 = x^2 + y^2$. Durch ein Verfahren, wie es im vorigen Paragraphen für das Ellipsoid angestellt wurde, ergibt sich zunächst, dass die Differentialgleichung der Curve durch ein System von drei Gleichungen ersetzt werden kann, deren erste ist

$$\mu dx = (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)d^2x - (F_1 d^2x + F_2 d^2y + F_3 d^2z)\,F_1.$$

Dabei ist für unsern Fall zu nehmen

$$F_1 = -f'(u)\frac{x}{u}, \quad F_2 = -f'(u)\frac{y}{u}, \quad F_3 = 1.$$

Multiplicirt man die drei Gleichungen mit dx, dy, dz und addirt, so folgt

$$\mu ds^2 = (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)\,ds d^2s$$

oder

$$\mu ds = (f'(u)^2 + 1)d^2s. \tag{2}$$

Multiplicirt man ferner die erste der Gleichungen mit F_2, die zweite mit F_1 und subtrahirt, so ergibt sich

$$\mu(F_2 dx - F_1 dy) = (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)\,(F_2 d^2x - F_1 d^2y)$$

oder speciell für die Rotationsfläche

$$\mu(y dx - x dy) = (f'(u)^2 + 1)\,(y d^2x - x d^2y). \tag{3}$$

Aus (2) und (3) erhält man die Differentialgleichung der geodätischen Linie durch Elimination von μ in der Form

$$\frac{y d^2x - x d^2y}{y dx - x dy} = \frac{d^2s}{ds}, \tag{4}$$

deren beide Seiten vollständige Differentiale sind. Das erste Integral ist

$$x dy - y dx = C ds \tag{5}$$

und wird zweckmässig durch Einführung von Polarcoordinaten transformirt. Setzt man nämlich

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v,$$

so kommt

$$x dy - y dx = u^2 dv,$$

und (5) geht über in

$$u^2 \frac{dv}{ds} = C. \tag{6}$$

Diese Gleichung stellt einen einfachen geometrischen Satz dar, welcher schon von Clairaut angegeben worden ist. Es seien die beiden Meridiane gezeichnet, deren Winkel $= dv$ ist, sodass $AB = u dv$ der unendlich kleine Bogen des Parallelkreises vom Radius u ist, welcher zwischen beiden Curven liegt. Ferner sei $\widehat{CAB} = \alpha$ der Winkel, welchen das Element $AC = ds$ der geodätischen Linie mit dem Parallelkreise bildet. Dann ist

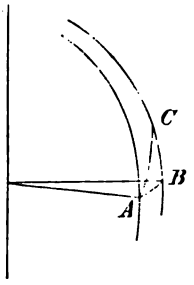


Fig. 5.

$$\frac{AB}{AC} = \cos \alpha,$$

und die Gleichung (6) liefert

$$u \cos \alpha = C,$$

d. h.: Multiplicirt man den Radius eines Parallelkreises mit dem Cosinus des Winkels, welchen eine geodätische Linie mit diesem Kreise bildet, so ist das Product längs der ganzen Linie constant.

Die Gleichung (6) lässt eine weitere Integration zu, wenn man noch

$$ds^2 = (1 + f'(u)^2)\, du^2 + u^2 dv^2$$

einführt. Dann wird

$$u^2(u^2 - C^2)\, dv^2 = C^2(1 + f'(u)^2)\, du^2,$$

eine Formel, deren Integral ist

$$v = C \int_{u_0}^{u} \sqrt{\frac{1 + f'(u)^2}{u^2 - C^2}}\, \frac{du}{u} + C'. \tag{7}$$

Das Problem der Aufsuchung der geodätischen Linien auf den Rotationsflächen ist damit auf Quadraturen zurückgeführt.

Es sei speciell ein Rotationsellipsoid gegeben:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hier ist

$$f(u) = c\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}},$$

woraus

$$f'(u) = -\frac{cu}{a^2\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}}},$$

$$1 + f'(u)^2 = \frac{a^4 - (a^2 - c^2)u^2}{a^2(a^2 - u^2)}.$$

Das auszuführende Integral wird, wenn man $u^2 = u'$ setzt, abgesehen von dem Factor $\frac{C}{a}$,

$$\int \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - c^2)u^2}}{\sqrt{(a^2 - u^2)(u^2 - C^2)}} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - c^2)u'}}{\sqrt{(a^2 - u')(u' - C^2)}} \frac{du'}{u'}.$$

Macht man die Wurzel im Zähler rational, indem man

$$a^4 - (a^2 - c^2)u' = t^2$$

setzt, so steigt der Radicandus im Nenner auf den vierten Grad. Die Aufgabe führt also auf elliptische Integrale, wie bereits p. 147 angegeben wurde.

§ 57.

Die Resultate der beiden letzten Paragraphen sind Specialfälle eines von Liouville gefundenen Satzes, nach welchem man für eine grosse Classe von Flächen die geodätischen Linien durch Quadraturen finden kann. Die Grundlage des Satzes bildet der Zusammenhang zwischen der Theorie dieser Linien und gewissen Problemen der analytischen Mechanik. Eine geodätische Linie erscheint nämlich 1) als Gleichgewichtscurve eines vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Fadens, welcher über eine Fläche ausgespannt wird, ohne dass andere Kräfte als die Spannung auf ihn wirken; 2) als Bahn eines materiellen Punktes, welcher ohne Einwirkung beschleunigender Kräfte sich auf einer Fläche bewegt. Halten wir uns an die letztere Thatsache und stellen die Bewegungsgleichungen in der zweiten, von Lagrange gegebenen Form auf:

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'} - \frac{\partial T}{\partial u} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v'} - \frac{\partial T}{\partial v} = 0,$$

in welcher

$$u' = \frac{du}{dt}, \qquad v' = \frac{dv}{dt},$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)$$

gesetzt ist, für m als Masse des gegebenen Punktes. Die Gleichungen

werden besonders einfach, wenn man u und v als isometrische Coordinaten voraussetzt; denn man erhält

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(E\frac{du}{dt}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(E\frac{dv}{dt}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right) = 0. \end{cases}$$

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft besagt hier, dass die Geschwindigkeit des Punktes constant ist:

$$(3)\qquad E\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right) = A,$$

und es ergibt sich durch Combination mit der ersten Gleichung (2):

$$\frac{d}{dt}\left(E\frac{du}{dt}\right) = \frac{A}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}$$

oder

$$(4)\qquad \frac{d}{dt}\left(E^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right) = A\frac{\partial E}{\partial u}\frac{du}{dt}.$$

Diese Gleichung lässt sich integriren, wenn $\frac{\partial E}{\partial u}$ eine Function von u allein, oder

$$(5)\qquad E = \varphi(u) + \psi(v)$$

ist; und man findet:

$$(6)\qquad E^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = A(\varphi(u) + C)$$

für C als Integrationsconstante. Weiter folgt aus der Gleichung (3):

$$(7)\qquad E^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = A(\psi(v) - C),$$

und durch Elimination von dt aus (6) und (7) als Differentialgleichung der Bahncurve

$$(8)\qquad \frac{du}{\sqrt{\varphi(u) + C}} = \frac{dv}{\pm\sqrt{\psi(v) - C}}.$$

Hierin sind die Variablen getrennt. Die geodätischen Linien können also immer dann durch Quadraturen gefunden werden, wenn sich ein isometrisches Coordinatensystem auf der Fläche angeben lässt, für welches E die durch (5) definirte Form hat. Im Falle der Rotationsflächen und der Flächen zweiten Grades bilden die Krümmungscurven ein solches System (§ 43).

Der Liouville'sche Satz kann auch direct mit Hilfe der Formeln des § 54 bewiesen werden. Aus (3, 4, 7, 5) dieses Paragraphen folgt nämlich für $E = G$, $F = 0$:

$$(9)\qquad \begin{cases} \cos w = \sqrt{E}\,\dfrac{du}{ds}, \quad \sin w = \sqrt{E}\,\dfrac{dv}{ds}, \quad \operatorname{tg} w = \dfrac{dv}{du}, \\ E\,dw = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial E}{\partial v}\,du - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial E}{\partial u}\,dv. \end{cases}$$

Multiplicirt man die beiden ersten Gleichungen mit der letzten und führt auch rechts die trigonometrischen Functionen von w ein, so ergibt sich

$$E\,d(\sin^2 w) = \frac{\partial E}{\partial v}\cos^2 w\,dv - \frac{\partial E}{\partial u}\sin^2 w\,du.$$

Ist jetzt $E = \varphi(u) + \psi(v)$, so kann diese Relation geschrieben werden:

$$\varphi(u)d(\sin^2 w) + \varphi'(u)\sin^2 w\,du = \psi(v)d(\cos^2 w) + \psi'(v)\cos^2 w\,dv$$

und liefert das Integral

$$(10)\qquad \varphi(u)\sin^2 w - \psi(v)\cos^2 w = C$$

oder

$$(11)\qquad \operatorname{tg} w = \frac{dv}{du} = \varepsilon\sqrt{\frac{\psi(v) - C}{\varphi(u) + C}},$$

d. h. wieder die Gleichung (8).

Auch die Bogenlänge einer geodätischen Linie kann unter der gemachten Annahme durch Quadraturen bestimmt werden. Aus (9) ergibt sich nämlich

$$(12)\qquad ds = \sqrt{E}\,(\cos w\,du + \sin w\,dv),$$

und aus (10):

$$\cos w = \pm\sqrt{\frac{\varphi(u) + C}{E}}, \quad \sin w = \pm\,\varepsilon\sqrt{\frac{\psi(v) - C}{E}},$$

mithin wird:

$$(13)\qquad s = \pm\int\sqrt{\varphi(u) + C}\,du \pm \varepsilon\int\sqrt{\psi(v) - C}\,dv + C'.$$

§ 58.

Kehren wir nunmehr zu allgemeinen Sätzen über geodätische Linien zurück. Von einem beliebigen Punkte A einer Fläche aus seien nach allen Richtungen hin derartige Curven gezogen, die Fläche jedoch so begrenzt, dass dieselben sich nicht zum zweiten Male schneiden. Nimmt man eine beliebige von ihnen als erste an, so kann jede andere Curve der Schaar durch Angabe des Winkels v bestimmt werden, welchen ihre Tangente im Punkte A mit der Tangente der ersten bildet. Wir denken uns ferner auf den geodätischen Linien von A aus gleiche Bogenlängen AB, AB', $AB'', \ldots = u$ abgetragen. Der geometrische Ort der Endpunkte B, $B', \ldots$ dieser krummlinigen Strecken ist eine Curve, welche als geodätischer Kreis bezeichnet

werden soll. Dabei ist jedoch festzuhalten, dass eine solche Linie im Allgemeinen nicht selbst eine geodätische ist. Gibt man dem u andere und andere Werte, so erhält man eine ganze Schaar geodätischer Kreise, von welchen behauptet wird, dass sie sämmtlich die geodätischen Linien unter rechten Winkeln schneiden. Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir zunächst die beiden Curvenschaaren als Coordinatenlinien an, was offenbar gestattet ist, da durch jeden beliebigen Punkt des Flächenstückes eine geodätische Linie $v = \text{const.}$ und ein geodätischer Kreis $u = \text{const.}$ hindurchgeht. Das so gewählte Coordinatensystem erfüllt nur im Punkte A nicht die im § 3 festgesetzten Bedingungen, wohl aber für Punkte in beliebiger Nähe von A. Stellt man jetzt die Bedingung dafür auf, dass die Linien $v = \text{const.}$ geodätisch sind, oder dass die Differentialgleichung § 53 (9) durch $dv = 0$ erfüllt wird, so ergibt sich

$$(1) \qquad E\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} = 0 \quad \text{oder} \quad J_2 = 0.$$

Ist ferner ds' das von einem beliebigen Punkte der Curve $v = \text{const.}$ ausgehende Linienelement dieser Curve, so ist

$$ds'^2 = Edu^2,$$

woraus, da u selbst die Bogenlänge der geodätischen Linie bezeichnete, ds' also gleich du ist,

$$E = 1$$

sich ergibt. Setzt man dies in (1) ein, so folgt

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

d. h. F ist Function von v allein oder hat längs jeder einzelnen geodätischen Linie denselben Wert. Um letzteren zu finden, nehmen wir u unendlich klein an; dann geht der geodätische Kreis $u = \text{const.}$ in einen ebenen Kreis über, und AB, AB', ... können als geradlinig, nämlich als die Radien dieses Kreises betrachtet werden. Hiernach stehen die geodätischen Linien auf der Peripherie des Kreises senkrecht, und der, allen Punkten von $v = \text{const.}$ gemeinsame Wert von F wird:

$$F = 0.$$

Die Orthogonalität der von A ausgehenden geodätischen Linien und der geodätischen Kreise ist damit bewiesen. Die vorher eingeführten Coordinaten u, v, welche mit diesem Curvensystem zusammenhängen, sollen als geodätische Polarcoordinaten bezeichnet werden.

Der eben bewiesene Satz kann als Specialfall eines anderen aufgefasst werden, dessen Voraussetzungen folgende sind. Es sei auf der

Fläche eine beliebige Curve angenommen, deren Punkte als eindeutig durch eine Variable v bestimmt vorausgesetzt werden. In irgend einem Punkte A sei eine geodätische Linie gezogen, deren Tangente auf der Curventangente senkrecht steht. Eine solche Linie soll eine geodätische Normale der Curve heissen. Sie ist durch Angabe des Wertes v bestimmt, welcher dem Punkte A zugehört. Denkt man sich die ganze Schaar geodätischer Normalen längs der angenommenen Curve construirt und auf ihnen allen von der Curve aus nach einer bestimmten Richtung gleiche Bogen u abgetragen, so bilden die Endpunkte der Strecken eine neue Curve, $u = C$. Wird u innerhalb gewisser Grenzen variirt, so entsteht eine Schaar von Linien, welche sich nirgends schneiden und daher als geodätische Parallelen oder kurz als Parallelcurven bezeichnet werden sollen. Stellt man jetzt die Bedingung dafür auf, dass $v = \text{const.}$ eine geodätische Linie ist, so ergibt dieselbe Rechnung wie vorher (in welcher nur v eine andere geometrische Bedeutung hat), dass F allein von v abhängen kann. Nun ist für $u = 0$ und für alle Werte von v $F = 0$, da die ursprüngliche Curve, welche zu der Schaar $u = \text{const.}$ gehört, auf den Linien $v = \text{const.}$ senkrecht steht. Demnach ist allgemein $F = 0$, d. h. die geodätischen Parallelen schneiden die geodätischen Normalen unter rechten Winkeln. Die krummlinigen Coordinaten u, v, welche sich auf diese Curvenschaaren gründen, werden als geodätische Parallelcoordinaten bezeichnet. Die letzteren und die geodätischen Polarcoordinaten fasst man unter dem Namen orthogonal-geodätischer Coordinaten zusammen.

Lässt man in dem zweiten Satze die gegebene Curve in einen Punkt degeneriren, so erhält man den zuerst bewiesenen wieder.

Die Bedingungen

$$E = 1, \qquad F = 0$$

sind für orthogonal-geodätische Coordinaten u, v nicht nur notwendig, wie eben abgeleitet, sondern auch hinreichend. Denn führt man sie in die Differentialgleichung der geodätischen Linien ein, so ergibt sich die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial G}{\partial u} du^2 dv + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} du dv^2 + \frac{1}{2} G \frac{\partial G}{\partial u} dv^3 + G(du d^2v - dv d^2u) = 0,$$

welche durch $dv = 0$ erfüllt wird. Die Linien $v = \text{const.}$ bilden also eine Schaar geodätischer Linien, und die Curven $u = \text{const.}$ stehen (wegen $F = 0$) auf ihnen senkrecht.

Allgemein dient die Gleichung (2) zur vollständigen Bestimmung

der geodätischen Linien auf einer Fläche, wenn eine specielle Schaar solcher Curven und die Schaar ihrer orthogonalen Trajectorien bekannt ist. So ist z. B. für die Rotationsflächen $E = 1$, $F = 0$, wenn die Linien $u = \text{const.}$ die Parallelkreise, $v = \text{const.}$ die Meridiane darstellen (§ 19). Ausserdem ist für diese Flächen

$$G = \varphi(u),$$

sodass für u als unabhängige Variable (2) übergeht in

$$\varphi(u)\frac{d^2v}{du^2} + \frac{1}{2}\varphi(u)\varphi'(u)\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + \varphi'(u)\frac{dv}{du} = 0. \tag{3}$$

Setzt man

$$\frac{dv}{du} = v'$$

und dividirt durch $\varphi(u)$, so erhält man die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dv'}{du} + \frac{1}{2}\varphi'(u)v'^3 + \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}v' = 0,$$

welche durch die Substitution

$$v'^{-2} = w$$

in die lineare

$$\frac{dw}{du} - 2\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}w - \varphi'(u) = 0 \tag{4}$$

transformirt wird. Das Integral derselben findet sich nach bekannten Methoden:

$$w = A\varphi(u)^2 - \varphi(u),$$

woraus bei Benutzung der Transformationsgleichungen und nochmaliger Integration

$$v = \int \frac{du}{\sqrt{A\varphi(u)^2 - \varphi(u)}} \tag{5}$$

folgt, wenn die zweite Integrationsconstante als in dem Integral enthalten gedacht wird. Die Gleichung (5) kann nur der Form nach von der in § 56 abgeleiteten (7) verschieden sein, und wird in der That in diese übergeführt, wenn man die Beziehung zwischen der Variablen u und derjenigen Grösse berücksichtigt, welche im § 19 ursprünglich mit u bezeichnet wurde, und wenn man ausserdem $A = \frac{1}{C^2}$ setzt.

Ueber die dritte Fundamentalgrösse G ist allgemein noch Folgendes zu bemerken. Es sei

$$\sqrt{G} = m$$

gesetzt, und es bezeichne ds'' das Linienelement einer Curve $u = \text{const.}$ Dann

$$ds'' = m dv, \qquad s'' = \int_0^v m dv,$$

wenn der Bogen s'' von dem Durchschnitt der betrachteten v-Linie mit der ersten geodätischen Linie an gerechnet wird. Sind nun u, v speciell geodätische Polarcoordinaten, so zieht sich mit abnehmendem u die Curve $u =$ const. mehr und mehr um den Pol zusammen, sodass auch s'' unabhängig von der oberen Grenze v zu Null abnimmt. Demnach hat man

$$m = 0 \quad \text{für} \quad u = 0.$$

Für sehr kleine u ist, wie oben bereits bemerkt, die Trajectorie der geodätischen Linien als Kreis zu betrachten; daher wird $ds'' = u dv$. Andererseits erhält man mit Benutzung des eben gefundenen Resultats und bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung:

$$m = u \left(\frac{\partial m}{\partial u}\right)_{u=0};$$

daher ist

$$\frac{\partial m}{\partial u} = 1 \quad \text{für} \quad u = 0.$$

Für $E = 1$, $F = 0$ ergibt sich

$$(6) \qquad \begin{cases} J_1 = J_1' = J_2 = 0 \\ J_1'' = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad J_2' = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad J_2'' = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}, \end{cases}$$

und die Gauss'sche Relation lässt sich in die einfache Form setzen

$$(7) \qquad LN - M^2 = \frac{1}{4G}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - 2G\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right] = -\sqrt{G}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = -m\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$$

oder

$$(8) \qquad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Die übrigen Formeln, welche für orthogonal-geodätische Coordinaten aus § 37 folgen würden, sollen nicht aufgestellt werden.

§ 59.

Im vorigen Paragraphen wurden die geodätischen Kreise und die geodätischen Parallelcurven als orthogonale Trajectorien gewisser Schaaren von geodätischen Linien definirt. Es sei jetzt die Bedingung aufzusuchen, unter welcher eine Curvenschaar

$$(1) \qquad \varphi(u, v) = \text{const.}$$

durch solche Trajectorien gebildet wird. Um diese Aufgabe mit Hilfe der Resultate des § 58 lösen zu können, fassen wir sie als eine Frage

der Coordinaten-Transformation auf. Die Curvenschaar (1) bilde zusammen mit der Schaar geodätischer Linien, auf welcher sie senkrecht steht, das System der Coordinatenlinien, und zwar werde

$$\varphi(u, v) = u'$$

gesetzt, während $v' = \text{const.}$, für v' als eine zweite Function ψ von u und v, die geodätischen Linien darstellt. Dann ist für die neuen Coordinaten

$$E' = 1, \qquad F' = 0.$$

Benutzt man die Ausdrücke von E', F', G', welche die Transformation der Coordinaten liefert [§ 5 (12)], und setzt $u' = \varphi$, $v' = \psi$, so erhält man:

$$E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 = EG - F^2 \tag{2}$$

$$E\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0 \tag{3}$$

$$E\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 = \frac{EG - F^2}{G'}. \tag{4}$$

Die Gleichung (2) gibt die gesuchte Bedingung für φ. Wird zur Abkürzung

$$\frac{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} = \Delta^1(\varphi)$$

geschrieben, so nimmt sie die Form an

$$\Delta^1(\varphi) = 1.$$

Setzt man für φ die eindeutige und eindeutig umkehrbare Function $f(\varphi)$, stellt demnach die betrachteten Curven durch

$$f(\varphi) = \text{const.}$$

dar, so geht die Gleichung über in

$$\Delta^1(\varphi) = \frac{1}{f'(\varphi)^2}.$$

Angenommen, man sei umgekehrt auf irgend einem Wege auf die partielle Differentialgleichung

$$\Delta^1(\varphi) = g(\varphi) \tag{5}$$

geführt worden, so kann man zu einer Einsicht in die Natur der durch sie dargestellten Curven direct in folgender Weise gelangen. Man definire eine Function $f(\varphi)$ durch die Gleichung

$$g(\varphi) = \frac{1}{f'(\varphi)^2} \quad \text{oder} \quad f(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{g(\varphi)}},$$

so liefert (5):

$$\Delta^1(f(\varphi)) = 1.$$

Mit anderen Worten, jene Gleichung lässt sich auf die einfachere $\Delta^1(\varphi) = 1$ reduciren. Nimmt man nun die Curven $f(\varphi) = \text{const.}$ oder $\varphi = \text{const.}$ zu Coordinatenlinien, setzt also etwa $f(\varphi) = u$, so erhält man weiter

$$G = EG - F^2.$$

Die zweite Schaar der Coordinatenlinien sei zu der ersten senkrecht, so ist $F = 0$, mithin $E = 1$. Diese Bedingungen charakterisiren aber die durch (5) definirten Curven als orthogonale Trajectorien einer Schaar geodätischer Linien, deren Bogenlänge gleich u ist.

Um zu der Bestimmung aller möglichen geodätischen Parallelen oder geodätischen Kreise auf einer gegebenen Fläche zu gelangen, hat man hiernach die Gleichung $\Delta^1(\varphi) = 1$ allgemein zu integriren. Ist diese Integration geleistet, so dient die Gleichung (3), aus welcher ψ zu bestimmen ist, zur Darstellung der geodätischen Linien $\psi = \text{const.}$, deren orthogonale Trajectorien die Curven $\varphi = \text{const.}$ sind. Endlich gibt (4) den Wert von G' und damit die vollständige Bestimmung des Linienelements unter Zugrundelegung der Coordinaten φ, ψ.

Bei der Lösung der partiellen Differentialgleichungen (2) und (3) treten zwei willkürliche Functionen auf — ein Umstand, dessen geometrische Bedeutung folgendermassen erkannt wird. Zunächst ist die Schaar der Curven $\varphi = \text{const.}$ nur dann völlig bestimmt, wenn eine von ihnen gegeben ist, welche wie im § 58 als Ausgangslinie der geodätischen Normalen betrachtet wird. Ferner kann man zur Fixirung ihrer einzelnen Punkte und damit auch der geodätischen Linien an Stelle der vorher mit v, jetzt mit ψ bezeichneten Variablen eine beliebige Function derselben verwenden. In der That wird, wenn ψ eine Lösung von (3) ist, das allgemeine Integral dieser Gleichung durch eine willkürliche Function von ψ gegeben.

Uebrigens ist nach Auffindung des allgemeinen Integrals von (2) zur Bestimmung von ψ keine neue Integration erforderlich. Angenommen nämlich, es sei

$$\varphi = P$$

dieses Integral, ω die in P enthaltene willkürliche Function. Das Argument der letzteren ist eine bestimmte Function von u und v, welche durch Integration des, zu der partiellen Differentialgleichung (2) gehörenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden wird. Ist nun ω_1 eine Function desselben Arguments, h eine willkürliche Constante, so kann man in P ω durch $\omega + h\omega_1$ ersetzen, weil dieser Ausdruck einer willkürlichen Function äquivalent ist. Entwickelt man φ nach Potenzen von h und bezeichnet mit Q den Coefficienten der ersten Potenz, sodass

$$\varphi = P + hQ + \cdots$$

wird, setzt ferner die Ausdrücke

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial u} + h\frac{\partial Q}{\partial u} + \cdots, \cdots$$

in (2) ein, so wird der Annahme nach

$$E\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial P}{\partial u} + G\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2 - (EG - F^2) = 0,$$

und damit der Coefficient von h verschwinde, muss

$$\left(E\frac{\partial P}{\partial v} - F\frac{\partial P}{\partial u}\right)\frac{\partial Q}{\partial v} - \left(F\frac{\partial P}{\partial v} - G\frac{\partial P}{\partial u}\right)\frac{\partial Q}{\partial u} = 0$$

sein. Die letztere Gleichung ist aber mit (3) identisch, wenn man $\varphi = P$, $\psi = Q$ setzt. Mit anderen Worten, es gibt

$$\psi = Q$$

eine Lösung der Gleichung (3). —

Es seien jetzt die beiden Schaaren der Coordinatenlinien geodätische Parallelen. Dann kann man setzen

$$\Delta^1(u) = 1, \qquad \Delta^1(v) = 1$$

oder

$$\frac{G}{EG - F^2} = 1, \qquad \frac{E}{EG - F^2} = 1$$

oder endlich

$$E = G, \qquad F = \sqrt{E(E-1)}, \tag{6}$$

und die Grössen u, v sind die geodätischen Abstände eines Flächenpunktes von zwei willkürlich angenommenen Curven. Wir führen eine neue Coordinaten-Transformation aus, indem wir setzen

$$\frac{u+v}{2} = u', \qquad \frac{u-v}{2} = v', \tag{7}$$

also

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \frac{\partial u'}{\partial v} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial v'}{\partial u} = -\frac{\partial v'}{\partial v} = \frac{1}{2}.$$

Durch Substitution in die Gleichungen § 5 (12) folgt:

$$\begin{cases} \dfrac{E'}{E'G' - F'^2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{F}{EG - F^2}\right) \\ F' = 0 \\ \dfrac{G'}{E'G' - F'^2} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{F}{EG - F^2}\right). \end{cases} \tag{8}$$

Die mittlere Gleichung besagt, dass die beiden Curvenschaaren $u' =$ const., $v' =$ const. sich unter rechten Winkeln schneiden. Nun ist nach (7) eine Curve $u' = a$ der geometrische Ort eines Punktes, für

welchen die geodätischen Abstände von zwei festen Curven die constante Summe $2a$ haben, und für eine Curve $v' = b$ tritt die Differenz an die Stelle der Summe. Man hat demnach folgenden Satz:

Nimmt man auf einer Fläche zwei Curven willkürlich an und denkt sich die beiden Schaaren von Linien construirt, für deren Punkte jedesmal die Summe resp. Differenz der geodätischen Abstände von jenen beiden Curven constant ist, so schneiden sich diese beiden Schaaren gegenseitig unter rechten Winkeln.

Speciellere Sätze erhält man, wenn man eine der beiden festen Curven oder beide in Punkte degeneriren lässt.

Eliminirt man aus der ersten und dritten Gleichung (8) F durch Addition, schreibt ferner E, F, G für E', F', G', so ergibt sich:

Werden die beiden eben definirten Curvenschaaren zu Coordinatenlinien gewählt, so sind die Fundamentalgrössen durch die Gleichungen

$$E + G - EG = 0, \qquad F = 0 \tag{9}$$

verbunden.

III. Abschnitt.

Transformation binärer Differentialformen.

§ 60.

Aus den, in den beiden ersten Abschnitten angestellten Entwickelungen geht hervor, dass die Lehrsätze und Aufgaben der Flächen-Geometrie mit der Theorie zweier Ausdrücke der Form

$$a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2$$

in engem Zusammenhange stehen. Es wurde nämlich das Quadrat des Linienelements ds einer Fläche durch die Grösse

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \equiv A$$

dargestellt, während $\frac{ds^2}{\varrho}$, für ϱ als Krümmungsradius des zu ds gehörigen Normalschnitts, durch den analog gebildeten Wert

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \equiv B$$

repräsentirt wird. Ausser diesen beiden binären quadratischen Differentialformen sind im Laufe der Untersuchung noch zwei andere eingeführt worden: das Quadrat des Linienelements $d\sigma$ der Gauss'schen Kugel, welches sich als homogene lineare Function von A und B darstellen liess, und die Form Γ, deren Quadrat als homogene Func-

tion zweiten Grades derselben Grösse bestimmt werden konnte. Im zweiten Abschnitt sind speciell die Curvensysteme behandelt worden, zu welchen man durch Nullsetzung von A, B, Γ gelangt. Und zwar lieferte $\Gamma = 0$ die Krümmungslinien, $B = 0$ für negatives Krümmungsmass die Asymptotencurven. A kann für reelle Linien, mit welchen wir es hier ausschliesslich zu thun haben, nicht verschwinden; doch führte das Problem der isometrischen Curven auf die Integration der Differentialgleichung $A = 0$. Die Vereinfachungen, welche für die wichtigsten flächentheoretischen Formeln beim Uebergange von dem allgemeinen zu dem jedesmaligen besonderen Coordinatensysteme eintreten, sind in den einzelnen Fällen angegeben worden.

Für die Flächentheorie ist es wesentlich, dass die sechs Coefficienten der beiden Differentialformen A und B durch drei Relationen, die Fundamentalgleichungen, mit einander verbunden sind. Von diesen enthält eine die Grössen L, M, N nur algebraisch, dagegen die Differentialquotienten von E, F, G bis zur zweiten Ordnung hin; die beiden anderen führen Ableitungen erster Ordnung aller sechs Coefficienten mit sich.

Die Aufgabe der simultanen Transformation zweier binären Differentialformen 2. Grades, zwischen deren Coefficienten die drei Fundamentalgleichungen stattfinden, kann nach dem Obigen als ein Grundproblem der Flächentheorie bezeichnet werden. Als eine Aufgabe charakterisirt sich dabei die Transformationstheorie namentlich insofern, als die Frage nach invarianten Ausdrücken gestellt wird. Die Bedeutung derartiger Werte, welche die Eigenschaft haben, bei der Transformation ungeändert zu bleiben, tritt vom geometrischen Gesichtspunkte aus besonders deutlich hervor. Während einerseits invariante Grössen durch die Transformationstheorie geliefert werden, so gestattet bei anderen Ausdrücken die geometrisch evidente Unabhängigkeit vom Coordinatensystem einen Rückschluss auf die Invarianz bei der Transformation.

Die Hauptresultate der Theorie der binären quadratischen Differentialformen, insofern sie für die Flächentheorie verwertet werden sollen, werden in diesem Abschnitt zu entwickeln sein. Und zwar bleiben wir zunächst bei der Transformation einer solchen Form stehen.

§ 61.

Es sei

$$a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 \equiv A$$

eine gegebene Form. Ihre Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} sind endliche und

stetige Functionen der Variablen u und v für alle Wertsysteme eines gewissen Bereiches; und dieselben Eigenschaften sollen auch den successiven Ableitungen der a_{ik} nach u und v zukommen, soweit dieselben im Folgenden gebraucht werden. Wo es der Uebersichtlichkeit wegen zweckmässig erscheint, wollen wir die Zeichen u und v durch u_1 und u_2 ersetzen und die Form A selbst in der Gestalt

$$\Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k$$

schreiben. Dabei erhält jeder Index i, k die Werte 1, 2, und es wird für $i \gtrless k$ $a_{ki} = a_{ik}$ vorausgesetzt.

Es werde jetzt ein System neuer Variablen u', v' oder u_1', u_2' eingeführt, welche Functionen der alten sind, und die Differentialform

$$\mathsf{A}' \equiv a_{11}'\, du'^2 + 2a_{12}'\, du'\, dv' + a_{22}'\, dv'^2 \equiv \Sigma a'_{ik}\, du_i'\, du_k'$$

betrachtet, deren Coefficienten a'_{ik} gegebene Functionen von u' und v' sein sollen. Wenn man weiss, dass vermöge des functionalen Zusammenhanges der Variablenpaare die Gleichung

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}' \tag{1}$$

stattfindet, so ist es leicht, die Beziehungen zwischen den Grössen a_{ik} und a'_{ik} anzugeben. Es sei nämlich

$$u' = \varphi(u, v), \qquad v' = \psi(u, v),$$

woraus folgt

$$du' = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv, \quad dv' = \frac{\partial \psi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \psi}{\partial v}\, dv.$$

Dann besteht in Folge dieser Gleichungen nach Voraussetzung die Relation

$$a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 = a_{11}'du'^2 + 2a_{12}'du'dv' + a_{22}'dv'^2. \tag{2}$$

Es sei für's erste noch

$$du = \xi, \quad dv = \eta; \qquad du' = \xi', \quad dv' = \eta', \tag{3}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \alpha, \quad \frac{\partial u'}{\partial v} = \beta, \quad \frac{\partial v'}{\partial u} = \gamma, \quad \frac{\partial v'}{\partial v} = \delta \tag{4}$$

gesetzt. Die Gleichungen

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 = a_{11}'\xi'^2 + 2a_{12}'\xi'\eta' + a_{22}'\eta'^2 \tag{5}$$

$$\begin{cases} \xi' = \alpha\xi + \beta\eta \\ \eta' = \gamma\xi + \delta\eta \end{cases} \tag{6}$$

liefern dann, da ξ und η als unabhängige Variable zu betrachten sind, die gesuchten Beziehungen in der Form:

$$\begin{cases} a_{11} = a_{11}'\alpha^2 + 2a_{12}'\alpha\gamma + a_{22}'\gamma^2 \\ a_{12} = a_{11}'\alpha\beta + a_{12}'(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_{22}'\gamma\delta \\ a_{22} = a_{11}'\beta^2 + 2a_{12}'\beta\delta + a_{22}'\delta^2. \end{cases} \tag{7}$$

Für $a_{11} = E$, $a_{12} = F$, $a_{22} = G$, $a_{11}' = E'$ etc. sind diese Gleichungen bereits im § 5 gegeben worden. Sie gelten offenbar auch für die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung. Denn der Wert der Differentialform $\frac{ds^2}{\varrho}$ ist durch Angabe der beiden Endpunkte von ds bestimmt, hängt aber nicht von dem gewählten System krummliniger Coordinaten ab. In Folge dessen besteht die Gleichung

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = L'\xi'^2 + 2M'\xi'\eta' + N'\eta'^2$$

unter Hinzunahme der Formeln (6), und es folgt:

$$(8)\qquad \begin{cases} L = L'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2M'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + N'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \\ M = L'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + M'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + N'\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} \\ N = L'\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2M'\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + N'\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

Hierin bedeuten also L', M', N' diejenigen Grössen, welche in Bezug auf u', v' aus $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ (§ 5) ebenso gebildet sind, wie L, M, N hinsichtlich u, v aus x, y, z.

Es wäre nicht schwer, diese Relationen durch directe Rechnung zu verificiren. Man würde zunächst aus den Definitionen von X, Y, Z [§ 8 (7)] die geometrisch evidenten Gleichungen

$$(9)\qquad X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z'$$

ableiten. Bildet man alsdann die zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ etc. aus den Gleichungen § 5 (4) und multiplicirt die entstehenden Formeln mit (9), so heben sich in Folge der Identitäten $\sum X'\frac{\partial \bar{x}}{\partial u'} = 0$, $\sum X'\frac{\partial \bar{x}}{\partial v'} = 0$ die Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 u'}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 v'}{\partial u^2}$ etc. fort, und es entstehen die Gleichungen (8).

§ 62.

Die Gesammtheit der Folgerungen, welche sich aus den Formeln (7) des vorigen Paragraphen (und den analogen bei Hinzunahme anderer Formen 2. Grades B, Γ, ...) ziehen lassen, unter der Voraussetzung, dass die a_{ik}, a'_{ik}, ... als Constanten behandelt werden, bildet die sogenannte algebraische Theorie der quadratischen Formen. Man bezeichnet bekanntlich in dieser Theorie als Invariante eine Function der Coefficienten a_{ik}, ..., welche die Eigenschaft hat, bei einer linearen Transformation der Variablen in die gleichgebildete Function

der $a'_{ik}, \ldots$, multiplicirt mit einer Potenz der Substitutionsdeterminante, überzugehen. Setzt man

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta', \tag{1}$$

so besteht also für eine Invariante eine Gleichung der Form

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, \ldots) = \Delta'^n f(a_{11}', a_{12}', a_{22}', \ldots). \tag{2}$$

Ist $n = 0$, oder geht der betrachtete Ausdruck in sich selbst über, so wird er eine absolute Invariante genannt. Wir werden im Allgemeinen nur die letzteren als Invarianten bezeichnen. Wo es nötig ist, werden die allgemeineren durch den Zusatz „algebraisch" von diesen unterschieden werden.

Die Theorie der Formen lehrt, dass eine einzelne quadratische Form nur eine algebraische Invariante besitzt, nämlich ihre Determinante

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a, \tag{3}$$

welche wir stets als von Null verschieden voraussetzen.

Es besteht die Gleichung

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \Delta'^2(a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2) \tag{4}$$

oder

$$a = \Delta'^2 a',$$

welche bei anderen Bezeichnungen schon im § 5 als eine Folge der Transformationsformeln § 61 (7) dargethan wurde. Das Zeichen von Δ' sei stets positiv angenommen (cf. § 6). Je nachdem dann a (mithin auch a') > 0 oder < 0 ist, kann man schreiben

$$\sqrt{a} = \Delta'\sqrt{a'} \quad \text{oder} \quad \sqrt{-a} = \Delta'\sqrt{-a'}. \tag{5}$$

Aus den Gleichungen § 61 (6) folge durch Auflösung

$$\xi = \alpha'\xi' + \beta'\eta'$$
$$\eta = \gamma'\xi' + \delta'\eta'.$$

Setzt man diese Ausdrücke in $A = A'$ ein, so ergibt sich ein zweites System von Relationen, welches aus (7) dadurch hervorgeht, dass man a_{ik} mit a'_{ik} vertauscht, $\alpha \ldots \delta$ durch $\alpha' \ldots \delta'$ ersetzt. Nun ist

$$\Delta'\xi = \delta\xi' - \beta\eta'$$
$$\Delta'\eta = \alpha\eta' - \gamma\xi',$$

mithin

$$\alpha' = \frac{\delta}{\Delta'}, \quad \beta' = -\frac{\beta}{\Delta'}, \quad \gamma' = -\frac{\gamma}{\Delta'}, \quad \delta = \frac{\alpha}{\Delta'}. \tag{6}$$

Daher folgt, mit Hinzuziehung von (4):

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{a_{11}'}{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2} = \dfrac{a_{11}\delta^2 - 2a_{12}\delta\gamma + a_{22}\gamma^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \dfrac{-a_{12}'}{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2} = \dfrac{a_{11}\delta\beta - a_{12}(\delta\alpha + \gamma\beta) + a_{22}\gamma\alpha}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \dfrac{a_{22}'}{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2} = \dfrac{a_{11}\beta^2 - 2a_{12}\beta\alpha + a_{22}\alpha^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \end{cases}$$

ein Formelsystem, welches für $a_{11} = E$ etc. den Gleichungen § 5 (12) entspricht. Gibt man $\xi \ldots \eta'$ die Werte § 61 (3), so wird

$$(8)\quad \alpha' = \frac{\partial u}{\partial u'},\quad \beta' = \frac{\partial u}{\partial v'},\quad \gamma' = \frac{\partial v}{\partial u'},\quad \delta' = \frac{\partial v}{\partial v'},$$

und die Gleichungen (6) liefern:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial u'} = \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial v'}{\partial v}, & \dfrac{\partial u}{\partial v'} = -\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial u'}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial u'} = -\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial v'}{\partial u}, & \dfrac{\partial v}{\partial v'} = \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial u'}{\partial u}, \end{cases}$$

die Umkehrungsformeln, welche bei Vertauschung der Bezeichnungen mit den Relationen § 5 (10) identisch werden.

§ 63.

Anstatt aus den Transformationsformeln § 61 (7) Folgerungen abzuleiten, ist es häufig zweckmässig, auf die ursprüngliche Gleichung

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 = a_{11}'\xi'^2 + 2a_{12}'\xi'\eta' + a_{22}'\eta'^2$$

zu recurriren. Denn da jene Formeln vermöge der Variabilität von ξ und η mit Notwendigkeit aus dieser Relation folgten, und umgekehrt diese durch Multiplication mit ξ^2, $2\xi\eta$, η^2 und Addition aus jenen hervorgeht, so ersetzen sie sich gegenseitig vollständig. Dabei ist im Auge zu behalten, dass die Formel (5) nicht aufhört, in Folge von (7) zu gelten, wenn man unter $\xi, \ldots \eta'$ ganz beliebige, nur immer durch die Substitutionsgleichungen (6) verbundene Grössen versteht.

Das System der drei Gleichungen (7) ist aber hinreichend für das Bestehen einer allgemeineren Beziehung als $A = A'$. Bedeuten nämlich x, y; x', y' zwei neue Paare von Grössen, welche durch die, den Gleichungen (6) analogen

$$(1)\quad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

verbunden sind, so gilt, wie man sich sofort überzeugt, die Relation

$$(2)\quad a_{11}x\xi + a_{12}(x\eta + y\xi) + a_{22}y\eta = a_{11}'x'\xi' + a_{12}'(x'\eta' + y'\xi') + a_{22}'y'\eta'.$$

D. h. die Transformation der quadratischen Form

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 = A$$

zieht die der bilinearen Form

$$a_{11}x\xi + a_{12}(x\eta + y\xi) + a_{22}y\eta \equiv \mathfrak{A}$$

nach sich. Erteilt man den Grössen $\alpha \ldots \delta$, $\xi \ldots \eta'$ die Bedeutungen § 61 (3, 4), setzt ferner

$$x = \delta u, \quad y = \delta v; \qquad x' = \delta u', \quad y' = \delta v', \tag{3}$$

so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} a_{11}du\delta u + a_{12}(du\delta v + dv\delta u) + a_{22}dv\delta v \\ = a_{11}'du'\delta u' + a_{12}'(du'\delta v' + dv'\delta u') + a_{22}'dv'\delta v' \end{aligned} \tag{4}$$

als eine Folge der ursprünglichen

$$a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 = a_{11}'du'^2 + 2a_{12}'du'dv' + a_{22}'dv'^2.$$

Die Grössen $\delta u, \ldots \delta v'$ brauchen dabei nur den, für die Differentiale $du, \ldots dv'$ charakteristischen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \delta u' &= \frac{\partial u'}{\partial u}\delta u + \frac{\partial u'}{\partial v}\delta v \\ \delta v' &= \frac{\partial v'}{\partial u}\delta u + \frac{\partial v'}{\partial v}\delta v \end{aligned}\right. \tag{5}$$

zu genügen; im Uebrigen sind sie völlig willkürlich.

Um von diesem sehr fruchtbaren Satze eine Anwendung zu machen, betrachten wir eine beliebige Function χ von u und v. Vermöge der Transformation werde

$$\chi(u, v) = \bar{\chi}(u', v'). \tag{6}$$

Durch Differentiation nach u' und v' folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'} &= \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'} &= \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'}. \end{aligned}$$

Wendet man hier die Umkehrungsformeln § 62 (9) an, so ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'} &= \frac{1}{\Delta'}\frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{1}{\Delta'}\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'} &= -\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{1}{\Delta'}\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

und da nach § 62 (5) in allen Fällen

$$\sqrt{|a|} = \Delta'\sqrt{|a'|} \tag{8}$$

geschrieben werden darf, so folgt weiter

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|a'|}}\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'} &= \frac{1}{\sqrt{|a|}}\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{|a|}}\frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} \\ -\frac{1}{\sqrt{|a'|}}\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'} &= \frac{1}{\sqrt{|a|}}\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{|a|}}\frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Die Vergleichung mit (5) lehrt, dass man setzen kann

$$10) \quad \left| \begin{array}{ll} \delta u = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \chi}{\partial v}, & \delta v = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \delta u' = \frac{1}{\sqrt{a'}} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'}, & \delta v' = -\frac{1}{\sqrt{a'}} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'}. \end{array} \right.$$

Wird dies in 4) substituirt, so findet sich

$$11) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{a}} \left[(a_{11} \frac{\partial \chi}{\partial v} - a_{12} \frac{\partial \chi}{\partial u}) du + (a_{12} \frac{\partial \chi}{\partial v} - a_{22} \frac{\partial \chi}{\partial u}) dv \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{a'}} \left[(a_{11}' \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'} - a_{12}' \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'}) du' + (a_{12}' \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'} - a_{22}' \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'}) dv' \right] \end{aligned}$$

Nimmt man ferner in der Gleichung $A = A'$: $\xi = \delta u$, $\eta = \delta v$ etc., was nach der anfänglichen Bemerkung gestattet ist, so folgt, wenn

$$12) \quad \frac{1}{a} \left[a_{11} \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2 - 2 a_{12} \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial u} + a_{22} \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2 \right] = J_1(\chi)$$

bezeichnet wird,

$$13) \quad J_1 \chi = J_1 \bar{\chi}.$$

Endlich führen wir noch eine zweite Function Ξ von u, v ein, deren Wert beim Uebergange zu den neuen Variablen mit $\bar{\Xi}(u', v')$ bezeichnet werde, und setzen in Ξ: $x = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \Xi}{\partial v}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \Xi}{\partial u}$ etc., während $\xi, \eta, \ldots$ die eben angegebenen Werte behalten. Dann ergibt sich für

$$14) \quad \frac{1}{a} \left[a_{11} \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{\partial \Xi}{\partial v} - a_{12} \left(\frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{\partial \Xi}{\partial u} + \frac{\partial \Xi}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial u} \right) + a_{22} \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial \Xi}{\partial u} \right] = J_1(\chi, \Xi),$$

die Gleichung

$$15) \quad J_1(\chi, \Xi) = J_1(\bar{\chi}, \bar{\Xi}),$$

welche für $\Xi = \chi$ in die vorher aufgestellte übergeht.

§ 64.

Es seien jetzt $U du + V dv$, $U' du' + V' dv'$ zwei lineare Differentialformen, welche beim Uebergange von u, v zu u', v' in einander transformirt werden. Dann besteht also vermöge $u' = \varphi(u, v)$, $v' = \psi(u, v)$ die Gleichung

$$1) \quad U du + V dv = U' du' + V' dv'.$$

Hieraus folgt, wenn man du', dv' durch du, dv ausdrückt,

$$12) \quad \left| \begin{array}{l} U = U' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + V' \frac{\partial \psi}{\partial u} = \alpha U - \gamma V \\ V = U' \frac{\partial \varphi}{\partial v} + V' \frac{\partial \psi}{\partial v} = \beta U - \delta V. \end{array} \right.$$

und es lassen sich aus diesen Relationen genau dieselben Folgerungen ziehen wie aus den entsprechenden des vorigen Paragraphen, welche auf der besonderen Annahme beruhen, dafs U und V die partiellen Ableitungen einer Function $\chi(u, v)$ darstellen. Man kann daher setzen

$$(3)\qquad \begin{cases} \delta u = \frac{1}{\sqrt{|a|}} V, & \delta v = -\frac{1}{\sqrt{|a|}} U \\ \delta u' = \frac{1}{\sqrt{|a'|}} V', & \delta v' = -\frac{1}{\sqrt{|a'|}} U' \end{cases}$$

und diese Grössen für $x, y, \ldots$ oder $\xi, \eta, \ldots$ in § 61 (5) und § 63 (2) einführen. Auf diese Weise würden sich drei Relationen ergeben, welche den Gleichungen § 63 (11, 13, 15) an die Seite zu stellen sind.

Differentiirt man die erste Gleichung (2) nach v', die zweite nach u', so ergibt sich

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{\partial U'}{\partial v'} = \alpha'\left(\beta'\frac{\partial U}{\partial u} + \delta'\frac{\partial U}{\partial v}\right) + \gamma'\left(\beta'\frac{\partial V}{\partial u} + \delta'\frac{\partial V}{\partial v}\right) \\ \qquad\qquad + U\frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'} + V\frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'} \\ \frac{\partial V'}{\partial u'} = \beta'\left(\alpha'\frac{\partial U}{\partial u} + \gamma'\frac{\partial U}{\partial v}\right) + \delta'\left(\alpha'\frac{\partial V}{\partial u} + \gamma'\frac{\partial V}{\partial v}\right) \\ \qquad\qquad + U\frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'} + V\frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'}, \end{cases}$$

und durch Subtraction:

$$(5)\qquad \frac{\partial U'}{\partial v'} - \frac{\partial V'}{\partial u'} = \frac{1}{\Delta'}\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right).$$

Nimmt man jetzt wieder die Gleichung § 63 (8) hinzu, so kann man schreiben

$$(6)\qquad \frac{1}{\sqrt{|a|}}\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) = \frac{1}{\sqrt{|a'|}}\left(\frac{\partial U'}{\partial v'} - \frac{\partial V'}{\partial u'}\right).$$

Hierin setzen wir, der Gleichung § 63 (11) entsprechend,

$$U = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\left(a_{11}\frac{\partial \chi}{\partial v} - a_{12}\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\left(a_{12}\frac{\partial \chi}{\partial v} - a_{22}\frac{\partial \chi}{\partial u}\right).$$

Dann geht aus der linken Seite von (6), abgesehen vom Zeichen, die Grösse hervor:

$$(7)\qquad \Delta_a^2(\chi) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}\frac{\partial \chi}{\partial u} - a_{12}\frac{\partial \chi}{\partial v}}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a_{11}\frac{\partial \chi}{\partial v} - a_{12}\frac{\partial \chi}{\partial u}}{\sqrt{a}}\right)\right\},$$

und dieser Ausdruck, welcher die beliebige Function χ enthält, bleibt nach (6) ungeändert, wenn man u, v, χ, a_{ik} durch $u', v', \bar{\chi}, a'_{ik}$ ersetzt.

M. a. W., bezeichnet $\mathcal{F}_i\,\bar{\chi}$ den formell gleichgebildeten Wert für die zweite Annahme, so ist

$$5. \qquad \mathcal{F}_i\,\chi = \mathcal{F}_i\,\bar{\chi}.$$

Diese Formel liefert eine Beziehung zwischen den Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Function χ nach w und r und den entsprechenden Ableitungen der transformirten Function nach w' und r'. Um alle Formeln zu erhalten, welche zur Bestimmung von $\frac{\partial^2\bar{\chi}}{\partial w'^2}$, $\frac{\partial^2\bar{\chi}}{\partial w'\,\partial r'}$, $\frac{\partial^2\bar{\chi}}{\partial r'^2}$ aus $\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2}$, $\frac{\partial^2\chi}{\partial w\,\partial r}$, $\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}$ dienen können, hätte man auf das Gleichungssystem zu recurriren, welches aus

$$\frac{\partial\chi}{\partial w} = \alpha\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial w'} + \gamma\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial r'}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial r} = \beta\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial w'} - \delta\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial r'}$$

durch Differentiation folgt. In diesem System treten ausser den Ableitungen erster Ordnung $\alpha \ldots \delta$ auch die sechs Differentialquotienten $\frac{\partial^2 w'}{\partial w^2}$, $\frac{\partial^2 w'}{\partial w\,\partial r}$, ... von w' und r' in Bezug auf w und r auf. Letztere liessen könnten durch Differentiation der Gleichungen § 61 7. gefunden werden. Doch ist es zweckmässiger, auf die Gleichungen § 61 2., § 63 4. zurückzugehen und aus ihnen Folgerungen über die Differentiale d^2w, d^2r abzuleiten. Dies soll jetzt geschehen.

§ 65.

Es seien für die folgende Rechnung die Zeichen w, r, w', r' durch u_1, u_2, u_1', u_2' ersetzt, die Gleichung § 61 1. also in der Form

$$1. \qquad \sum_i a_i\,\delta u_i\,\delta u_i' = \sum_i a_i'\,\delta u_i'\,\delta u_i$$

geschrieben. In dieser Gleichung, welche für alle Werte u_1, u_2 innerhalb eines gewissen Bereiches der Variablen gilt, setzen wir $u_1 = \delta u_1$, $u_2 = \delta u_2$ für u_1', u_2'. Den Incrementen δu_1, δu_2 mögen die Veränderungen $\delta u_1'$, $\delta u_2'$ der Variablen u_1', u_2' entsprechen, sodass die Formeln gelten:

$$2. \qquad \begin{aligned} \delta u_1' &= \alpha\,\delta u_1 - \beta\,\delta u_2 \\ \delta u_2' &= \gamma\,\delta u_1 - \delta\,\delta u_2. \end{aligned}$$

Ferner nehmen wir an, dass in der mit 1. gleichzeitig bestehenden Formel § 63 4.

$$3. \qquad \sum_i a_i\,\delta u_i\,\delta u_i' = \sum_i a_i'\,\delta u_i'\,\delta u_i$$

die Grössen u_1', u_2' um $\delta u_1'$, $\delta u_2'$ wachsen. Betrachtet man u_1, u_2 als die Hauptvariablen, u_1' und u_2' als ihre Functionen, so kann man die Differentiale $\delta u_1'$, $\delta u_2'$ als constant annehmen, d. h. $\delta u_1'$, $\delta\delta u_1'$, $\delta\delta u_2'$

gleich Null setzen. Unter dieser Voraussetzung folgt, wenn die Gleichungen (1) und (3) von den veränderten subtrahirt und die Glieder dritter Ordnung beibehalten werden:

$$(4) \qquad 2\Sigma a'_{ik}\,du_i'\,d\delta u_k' + \Sigma \delta a'_{ik}\,du_i'\,du_k' = \Sigma \delta a_{ik}\,du_i\,du_k$$

$$(5) \quad \Sigma a'_{ik}\,d^2u_i'\,\delta u_k' + \Sigma a'_{ik}\,du_i'\,\delta du_k' + \Sigma da'_{ik}\,du_i'\,\delta u_k' = \Sigma da_{ik}\,du_i\,\delta u_k.$$

Hierin ist nach (2):

$$\begin{aligned} d\delta u_1' &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_1}\,du_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}\,du_2\right)\delta u_1 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u_1}\,du_1 + \frac{\partial \beta}{\partial u_2}\,du_2\right)\delta u_2 \\ &= \frac{\partial^2 u_1'}{\partial u_1^{\,2}}\,du_1\,\delta u_1 + \frac{\partial^2 u_1'}{\partial u_1\,\partial u_2}\,(du_1\,\delta u_2 + du_2\,\delta u_1) + \frac{\partial^2 u_1'}{\partial u_2^{\,2}}\,du_2\,\delta u_2, \end{aligned}$$

und derselbe Wert ergibt sich für $\delta du_1'$ aus der Relation

$$du_1' = \alpha du_1 + \beta du_2.$$

Ebenso wird $\delta du_2' = d\delta u_2'$; subtrahirt man mithin die mit $\frac{1}{2}$ multiplicirte Gleichung (4) von (5), so kommt

$$\begin{aligned} (6) \qquad \Sigma a'_{ik}\,d^2u_i'\,\delta u_k' + \Sigma da'_{ik}\,du_i'\,\delta u_k' - \tfrac{1}{2}\Sigma \delta a'_{ik}\,du_i'\,du_k' \\ = \Sigma da_{ik}\,du_i\,\delta u_k - \tfrac{1}{2}\Sigma \delta a_{ik}\,du_i\,du_k. \end{aligned}$$

Nun ist

$$da_{ik} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_1}\,du_1 + \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_2}\,du_2 = \sum_h \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_h}\,du_h$$

$$\delta a_{ik} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_1}\,\delta u_1 + \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_2}\,\delta u_2 = \sum_h \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_h}\,\delta u_h,$$

also

$$\sum \delta a_{ik}\,du_i\,du_k = \sum_{i,k,h} \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_h}\,du_i\,du_k\,\delta u_h,$$

oder, wenn man die Summationsbuchstaben h und k vertauscht:

$$\sum \delta a_{ik}\,du_i\,du_k = \sum_{i,h,k} \frac{\partial a_{ih}}{\partial u_k}\,du_i\,du_h\,\delta u_k.$$

Der Coefficient von δu_k in diesem Ausdruck wird

$$A_k = \sum_{i,h} \frac{\partial a_{ih}}{\partial u_k}\,du_i\,du_h.$$

Ferner hat man

$$\sum da_{ik}\,du_i\,\delta u_k = \sum_{i,k,h} \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_h}\,du_h\,du_i\,\delta u_k,$$

und hierin ist der Coefficient von δu_k:

$$B_k = \sum_{i,h} \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_h} du_h du_i .$$

Werden die Zeichen h und i vertauscht, so folgt auch

$$B_k = \sum_{h,i} \frac{\partial a_{hk}}{\partial u_i} du_i du_h ,$$

mithin durch Addition beider Ausdrücke:

$$B_k = \sum_{i,h} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_h} + \frac{\partial a_{hk}}{\partial u_i} \right) du_i du_h .$$

Vereinigt man nun die beiden Glieder auf der rechten Seite von (6), so wird erhalten:

$$\sum da_{ik} du_i \delta u_k - \frac{1}{2} \sum \delta a_{ik} du_i du_k = \sum_k \left(B_k - \frac{1}{2} A_k \right) \delta u_k$$

$$= \sum_{h,i,k} \begin{bmatrix} h\,i \\ k \end{bmatrix} du_h du_i \delta u_k ,$$

wenn

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_h} + \frac{\partial a_{hk}}{\partial u_i} - \frac{\partial a_{ih}}{\partial u_k} \right) = \begin{bmatrix} h\,i \\ k \end{bmatrix} \tag{7}$$

gesetzt wird. Transformirt man weiter das zweite und dritte Glied der linken Seite in derselben Art und setzt rechts für h, i, k die Zeichen p, q, r, so ergibt sich

$$\sum_{i,k} a'_{ik} d^2 u_i' \delta u_k' + \sum_{h,i,k} \begin{bmatrix} h\,i \\ k \end{bmatrix}' du_h' du_i' \delta u_k' = \sum_{p,q,r} \begin{bmatrix} p\,q \\ r \end{bmatrix} du_p du_q \delta u_r . \tag{8}$$

Hierin sind noch für δu_1, δu_2 ihre Ausdrücke in $\delta u_1'$, $\delta u_2'$ zu substituiren. Dabei empfiehlt es sich, folgendermassen zu verfahren. Man setze in (3)

$$du_i' = \frac{\partial u_i'}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial u_i'}{\partial u_2} du_2 = \sum_h \frac{\partial u_i'}{\partial u_h} du_h$$

und identificire die Coefficienten von du_h auf beiden Seiten der Gleichung. Dann wird

$$\sum_k a_{hk} \delta u_k = \sum_{i,k} a'_{ik} \frac{\partial u_i'}{\partial u_h} \delta u_k'$$

oder, $h = 1, 2$ gesetzt:

$$a_{11} \delta u_1 + a_{12} \delta u_2 = \sum_{i,k} a'_{ik} \frac{\partial u_i'}{\partial u_1} \delta u_k'$$

$$a_{21} \delta u_1 + a_{22} \delta u_2 = \sum_{i,k} a'_{ik} \frac{\partial u_i'}{\partial u_2} \delta u_k' ,$$

woraus durch Ausrechnung

$$(9)\quad \begin{cases} a\,\delta u_1 = \quad a_{22}\sum_{i,k} a'_{ik}\frac{\partial u_i'}{\partial u_1}\,\delta u_k' - a_{12}\sum_{i,k} a'_{ik}\frac{\partial u_i'}{\partial u_2}\,\delta u_k' \\ a\,\delta u_2 = -a_{12}\sum_{i,k} a'_{ik}\frac{\partial u_i'}{\partial u_1}\,\delta u_k' + a_{11}\sum_{i,k} a'_{ik}\frac{\partial u_i'}{\partial u_2}\,\delta u_k'. \end{cases}$$

Diese Werte setzen wir in (8) ein und erhalten durch Vergleichung der Coefficienten von $\delta u_k'$:

$$(10)\quad \sum_i a'_{ik}\,d^2u_i' + \sum_{h,i}\begin{bmatrix} h & i \\ k \end{bmatrix}' du_h'\,du_i' =$$

$$\frac{1}{a}\sum_{p,q}\left\{\begin{bmatrix} p & q \\ 1 \end{bmatrix} a_{22} - \begin{bmatrix} p & q \\ 2 \end{bmatrix} a_{12}\right\}\cdot\sum_i a'_{ik}\frac{\partial u_i'}{\partial u_1}\,du_p\,du_q$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p,q}\left\{-\begin{bmatrix} p & q \\ 1 \end{bmatrix} a_{12} + \begin{bmatrix} p & q \\ 2 \end{bmatrix} a_{11}\right\}\cdot\sum_i a'_{ik}\frac{\partial u_i'}{\partial u_2}\cdot du_p\,du_q.$$

Macht man hier der Reihe nach $k = 1, 2$ und löst die beiden entstehenden Gleichungen nach d^2u_1, d^2u_2 auf, so kommen auch links Grössen vor, welche denen auf der rechten Seite analog sind, nämlich die beiden:

$$\begin{bmatrix} h & i \\ 1 \end{bmatrix}' a_{22}' - \begin{bmatrix} h & i \\ 2 \end{bmatrix}' a_{21}', \qquad -\begin{bmatrix} h & i \\ 1 \end{bmatrix}' a_{12}' + \begin{bmatrix} h & i \\ 2 \end{bmatrix}' a_{11}',$$

welche auch in den Formen

$$\begin{bmatrix} h & i \\ 1 \end{bmatrix}' \alpha_{11}' + \begin{bmatrix} h & i \\ 2 \end{bmatrix}' \alpha_{12}', \qquad \begin{bmatrix} h & i \\ 1 \end{bmatrix}' \alpha_{21}' + \begin{bmatrix} h & i \\ 2 \end{bmatrix}' \alpha_{22}'$$

geschrieben werden können, in denen α'_{ik} die Unterdeterminante von a'_{ik} in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{vmatrix} = a'$$

bedeutet. Es sei noch

$$(11)\quad \frac{1}{a}\sum_g \begin{bmatrix} h & i \\ g \end{bmatrix} \alpha_{kg} = \begin{Bmatrix} h & i \\ k \end{Bmatrix}$$

gesetzt; dann geben die Gleichungen (10):

$$(12)\quad d^2u_k' + \sum_{h,i}\begin{Bmatrix} h & i \\ k \end{Bmatrix}' du_h'\,du_i' = \sum_{p,q,r}\begin{Bmatrix} p & q \\ r \end{Bmatrix}\frac{\partial u_k'}{\partial u_r}\,du_p\,du_q \qquad (k = 1, 2),$$

d. h., wenn man

$$du_h' = \sum_p \frac{\partial u_h'}{\partial u_p}\,du_p, \qquad du_i' = \sum_q \frac{\partial u_i'}{\partial u_q}\,du_q,$$

$$d^2u_k' = \sum \frac{\partial^2 u_k'}{\partial u_p\,\partial u_q}\,du_p\,du_q$$

einführt und die Coefficienten von $du_p du_q$ vergleicht:

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 u_k'}{\partial u_p \partial u_q} + \sum_{h,i} \left\{ \begin{matrix} h & i \\ k \end{matrix} \right\}' \frac{\partial u_h'}{\partial u_p} \frac{\partial u_i'}{\partial u_q} = \sum_r \left\{ \begin{matrix} p & q \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial u_k'}{\partial u_r}$$

$$(k, p, q = 1, 2).$$

Dies sind die gesuchten, von Christoffel herrührenden Formeln, welche die zweiten Ableitungen der Functionen u_1', u_2' durch die ersten, ferner durch die Coefficienten der Form A, der transformirten Form A′ und die Ableitungen dieser Coefficienten ausdrücken. — Für die Grössen δu_1, δu_2 sind dabei die Werte (9) gesetzt worden (anstatt derjenigen, welche etwa aus (2) mit Hilfe von § 62 (9) folgen würden), um in der Schlussformel (13) nur solche Verbindungen $\left\{ \begin{matrix} p & q \\ r \end{matrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{matrix} h & i \\ k \end{matrix} \right\}'$ zu erhalten, welche in derselben Weise aus den Coefficienten der ursprünglichen und der transformirten Form zusammengesetzt sind.

Es bleibt noch übrig, die Grössen $\left\{ \begin{matrix} h & i \\ k \end{matrix} \right\}$ explicite darzustellen. Aus (7) folgt unmittelbar, dass $\left\{ \begin{matrix} h & i \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i & h \\ k \end{matrix} \right\}$ ist, mithin hat man auch $\left[\begin{matrix} h & i \\ k \end{matrix} \right] = \left\{ \begin{matrix} i & h \\ k \end{matrix} \right\}$. Die Werte der $\left[\begin{matrix} h & i \\ k \end{matrix} \right]$ sind folgende:

$$(14)\qquad \begin{cases} \left[\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial u}, & \left[\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right] = \frac{\partial a_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial v} \\ \left[\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial v}, & \left[\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial u} \\ \left[\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right] = \frac{\partial a_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial u}, & \left[\begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial v}, \end{cases}$$

und die $\left\{ \begin{matrix} h & i \\ k \end{matrix} \right\}$ sind gegeben durch:

$$(15)\qquad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial u} - a_{12} \frac{\partial a_{12}}{\partial u} + \frac{1}{2} a_{12} \frac{\partial a_{11}}{\partial v} \right) \\ \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a} \left(a_{11} \frac{\partial a_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} a_{11} \frac{\partial a_{11}}{\partial v} - \frac{1}{2} a_{12} \frac{\partial a_{11}}{\partial u} \right) \\ \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial v} - \frac{1}{2} a_{12} \frac{\partial a_{22}}{\partial u} \right) \\ \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} a_{11} \frac{\partial a_{22}}{\partial u} - \frac{1}{2} a_{12} \frac{\partial a_{11}}{\partial v} \right) \\ \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a} \left(a_{22} \frac{\partial a_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2} a_{22} \frac{\partial a_{22}}{\partial u} - \frac{1}{2} a_{12} \frac{\partial a_{22}}{\partial v} \right) \\ \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} a_{11} \frac{\partial a_{22}}{\partial v} - a_{12} \frac{\partial a_{12}}{\partial v} + \frac{1}{2} a_{12} \frac{\partial a_{22}}{\partial u} \right). \end{cases}$$

Nimmt man $a_{11} = E$, $a_{12} = F$, $a_{22} = G$, so werden die Grössen $\begin{bmatrix} h\,i \\ k \end{bmatrix}$ mit $m \ldots n''$ [§ 27 (4, 5)] identisch, und in den $\left\{ \begin{matrix} h\,i \\ k \end{matrix} \right\}$ erkennt man die im § 28 mit $J_1 \ldots J_2''$ bezeichneten Verbindungen. Und zwar wird

$$(16) \qquad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = J_1, & \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = J_1', & \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = J_1'' \\ \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = J_2, & \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = J_2', & \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} = J_2''. \end{cases}$$

§ 66.

Wir wenden uns jetzt zur Bildung einer Invariante von A, welche ausser den Coefficienten a_{ik} auch deren Ableitungen nach u und v enthält. Man gelangt zu dieser Grösse am einfachsten, wenn man von dem Problem der Zerlegung einer binären quadratischen Differentialform in lineare Factoren ausgeht. Schreibt man

$$(1) \quad a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2$$
$$= \left[\sqrt{a_{11}}\,du + \frac{a_{12} + \sqrt{-a}}{\sqrt{a_{11}}}\,dv\right]\left[\sqrt{a_{11}}\,du + \frac{a_{12} - \sqrt{-a}}{\sqrt{a_{11}}}\,dv\right]$$
$$= (Adu + Bdv)(A'du + B'dv)$$

und bezeichnet mit m und m' die beiden integrirenden Factoren der linearen Differentialformen auf der rechten Seite, so kann man setzen

$$(2) \qquad \begin{aligned} m\,(A\,du + B\,dv) &= dp \\ m'(A'du + B'dv) &= dq. \end{aligned}$$

Hierin bedeuten p und q Functionen von u und v, welche durch Integration der Differentialgleichungen $Adu + Bdv = 0$, $A'du + B'dv = 0$ gefunden werden würden. Es sei noch

$$(3) \qquad mm' = n$$

gesetzt. Dann geht aus (1) und (2) die Gleichung hervor:

$$(4) \qquad n(a_{11}du^2 + 2a_{12}du\,dv + a_{22}dv^2) = dp\,dq.$$

Nun genügt jede der Grössen m und m' einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Setzt man vermöge (3) $m' = \frac{n}{m}$ und eliminirt m aus den beiden Gleichungen, so ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für n, welche hergeleitet werden soll, da sie unmittelbar zu der gesuchten Invariante führt.

In Folge von (2) bestehen die Gleichungen

$$\frac{\partial(mA)}{\partial v} = \frac{\partial(mB)}{\partial u}, \qquad \frac{\partial(m'A')}{\partial v} = \frac{\partial(m'B')}{\partial u}$$

oder

$$(5)\qquad \begin{aligned} B\frac{\partial \log m}{\partial u} - A\frac{\partial \log m}{\partial v} &= \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} \\ B'\frac{\partial \log m'}{\partial u} - A'\frac{\partial \log m'}{\partial v} &= \frac{\partial A'}{\partial v} - \frac{\partial B'}{\partial u}. \end{aligned}$$

Setzt man in der letzten:

$$\log m' = \log n - \log m = \psi - \log m,$$

so folgt

$$B'\frac{\partial \log m}{\partial u} - A'\frac{\partial \log m}{\partial v} = B'\frac{\partial \psi}{\partial u} - A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - \left(\frac{\partial A'}{\partial v} - \frac{\partial B'}{\partial u}\right),$$

und weiter durch Combination dieser Gleichung mit der ersten Formel (5):

$$\begin{aligned} (A'B - AB')\frac{\partial \log m}{\partial u} &= A'\left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u}\right) + A\left(\frac{\partial A'}{\partial v} - \frac{\partial B'}{\partial u}\right) \\ &\quad + A\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) \\ (A'B - AB')\frac{\partial \log m}{\partial v} &= B'\left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u}\right) + B\left(\frac{\partial A'}{\partial v} - \frac{\partial B'}{\partial u}\right) \\ &\quad + B\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right). \end{aligned}$$

Nun ist nach (1):

$$A = A' = \sqrt{a_{11}}, \qquad B = \frac{a_{12} + \sqrt{-a}}{\sqrt{a_{11}}}, \qquad B' = \frac{a_{12} - \sqrt{-a}}{\sqrt{a_{11}}},$$

mithin ergibt sich nach einer leichten Rechnung:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-a}\frac{\partial \log m}{\partial u} &= \frac{\partial a_{11}}{\partial v} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u} - 2\frac{\partial a_{12}}{\partial u} + A\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) \\ 2\sqrt{-a}\frac{\partial \log m}{\partial v} &= \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial v} - \frac{\partial a_{22}}{\partial u} + B\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right). \end{aligned}$$

Hieraus lässt sich jetzt m eliminiren, und die partielle Differentialgleichung für ψ wird, wenn man

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial v} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u} - 2\frac{\partial a_{12}}{\partial u}\right) &= g \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial v}\right) &= h \end{aligned}$$

setzt:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{A}{\sqrt{a}}\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\right] \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{B}{\sqrt{a}}\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

Sie lässt sich in sehr übersichtlicher Form darstellen, wenn die Differentiationen an letzter und vorletzter Stelle ausgeführt werden. Es folgt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{A}{\sqrt{a}}\left(A'\frac{\partial\psi}{\partial v}-B'\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{B}{\sqrt{a}}\left(A'\frac{\partial\psi}{\partial v}-B'\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(a_{22}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-2a_{12}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}+a_{11}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)$$
$$+\frac{\partial\psi}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{a_{22}}{\sqrt{a}}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{a_{12}}{\sqrt{a}}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{a_{11}}{\sqrt{a}}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{a_{12}}{\sqrt{a}}\right),$$

und die Vergleichung dieses Ausdruckes mit § 64 (7) lehrt, dass er mit $\sqrt{a}\,.\,\Delta_a^2(\psi)$ identisch ist. Demnach hat man schliesslich, wenn für g und h ihre Werte substituirt werden, folgendes Resultat: Besteht die Gleichung (4), so genügt die Grösse n der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta_a^2(\log n)-2k=0, \tag{8}$$

in welcher

$$k=-\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u}-\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial v}+\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u}-2\frac{\partial a_{12}}{\partial u}\right)\right] \tag{9}$$

gesetzt ist.

Es werde jetzt eine Veränderung der Variablen vorgenommen, bei welcher A in A′ transformirt wird. Sind $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{n}$ die Werte der Functionen p, q, n, in den neuen Veränderlichen u', v' ausgedrückt, so ergibt sich aus (4) die Gleichung

$$\bar{n}(a_{11}'du'^2+2a_{12}'du'dv'+a_{22}'dv'^2)=d\bar{p}\,d\bar{q}, \tag{10}$$

und diese zieht, wie eben nachgewiesen, die partielle Differentialgleichung

$$\Delta_a^2(\log\bar{n})-2k'=0 \tag{11}$$

nach sich, in welcher k' diejenige Grösse bezeichnet, welche aus den a'_{ik}, u' und v' ebenso gebildet ist, wie k aus den a_{ik}, u und v. Nun ist nach § 64 (8)

$$\Delta_a^2(\log n)=\Delta_{a'}^2(\log\bar{n}),$$

mithin folgt durch Zusammenstellung von (8) und (11):

$$k=k', \tag{12}$$

d. h. k ist eine Invariante.

Setzt man $a_{11}=E$, $a_{12}=F$, $a_{22}=G$ und gibt auch den vorkommenden Differentialquotienten ihre flächentheoretischen Bedeutungen, so beweist man leicht die Uebereinstimmung von k mit dem Gauss'schen Krümmungsmass. Nehmen wir nämlich speciell $u=x$, $v=y$, also [§ 16 (1)]: $a_{11}=1+p^2$, $a_{12}=pq$, $a_{22}=1+q^2$, so folgt aus (9):

$$k=\frac{-1}{(1+p^2+q^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{qs}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{qr}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}\right],$$

und nach Ausführung der Differentiationen:

$$k = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

d. h.

$$k = K. \tag{13}$$

Hiermit ist ein dritter Beweis für den Gauss'schen Satz (§ 27) geliefert. — Die Gleichung (9) entspricht dem Liouville'schen Ausdruck des Krümmungsmasses.

Was die Grössen p und q betrifft, so werden diese für $a_{11} = E$ etc. conjugirt complex, und führen auf isometrische Coordinaten, für welche der gemeinsame Wert von E' und G' durch $\frac{1}{n}$ gegeben wird.

§ 67.

Der im vorigen Paragraphen für die Invariante k gefundene Wert (9) ist nicht symmetrisch in Bezug auf u und v. Nur die beiden ersten Glieder unter den Differentionszeichen, nämlich $\frac{\partial a_{22}}{\partial u}$ und $\frac{\partial a_{11}}{\partial v}$, entsprechen einander. Doch ist von vornherein klar und auch aus dem ausgerechneten Wert (für $a_{11} = E$ etc.) § 27 (6) unmittelbar ersichtlich, dass ein symmetrischer Ausdruck existiren muss. In conciser Form erhält man einen solchen durch folgende Rechnung, bei welcher zunächst vorausgesetzt wird, dass die Differentialform A das Quadrat des Linienelements einer Fläche darstellt.

Es werde für F der Coordinatenwinkel ϑ durch die Gleichung § 3 (3)

$$F = \sqrt{EG}\cos\vartheta$$

eingeführt; dann folgt

$$-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v} = -\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta$$

$$\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial u} = 2\sqrt{EG}\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial u} - \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\cos\vartheta,$$

also

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{T}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial v} - \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\cos\vartheta\right)\right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG}}{T}\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)\right\}.$$

Nun ist nach § 3 (4):

$$\sin\vartheta = \frac{T}{\sqrt{EG}},$$

mithin

$$2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG}}{T}\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right) = 2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v},$$

und es kann weiter gesetzt werden

$$(1)\qquad K = -\frac{1}{2T}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta + T\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial v} - \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\cos\vartheta + T\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)\right\}.$$

Dieser Ausdruck ist bereits symmetrisch; es ist nur noch ϑ wieder herauszuschaffen. Man kann schreiben

$$-\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta + T\frac{\partial\vartheta}{\partial v} = -\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta + \sqrt{EG}\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial v}$$
$$= -\sqrt{\frac{G}{E}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta - E\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right) = -\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial(E\cos\vartheta)}{\partial v}$$
$$= -\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial\left(F\sqrt{\frac{E}{G}}\right)}{\partial v} = -\frac{\partial F}{\partial v} - F\frac{\partial\log\sqrt{\frac{E}{G}}}{\partial v}$$
$$= -\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial\log\frac{G}{E}}{\partial v},$$

und der entsprechende Ausdruck unter dem Zeichen der Differentiation nach v lässt die analoge Umwandlung zu. Daher ergibt sich der gesuchte symmetrische Wert, wenn für E, F, G wieder die a_{ik} eingeführt werden, K durch k ersetzt wird, in der, von Weingarten herrührenden Form

$$(2)\qquad k = -\frac{1}{2\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{1}{2}a_{12}\frac{\partial\log\frac{a_{22}}{a_{11}}}{\partial v} + \frac{\partial a_{22}}{\partial u} - \frac{\partial a_{12}}{\partial v}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{1}{2}a_{12}\frac{\partial\log\frac{a_{11}}{a_{22}}}{\partial u} + \frac{\partial a_{11}}{\partial v} - \frac{\partial a_{12}}{\partial u}\right]\right\}.$$

Dass dieser Ausdruck für eine beliebige Differentialform A gilt, erhellt ohne weiteres, sei es durch Modification der vorhergehenden Rechnung, sei es durch Vergleichung mit der ursprünglichen Darstellung [§ 66 (9)].

§ 68.

Mit Hilfe der im § 63 eingeführten Bezeichnungen kann man den Formeln, welche für die Transformation einer quadratischen Differentialform gelten, eine sehr übersichtliche Gestalt geben. Werden nämlich in § 62 (7) für $\alpha \ldots \delta$ ihre Werte [§ 61 (4)] eingesetzt, so ergibt sich

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_{11}'}{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2} = \Delta_a^1(v') \\ \dfrac{-a_{12}'}{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2} = \Delta_a(u',v') \\ \dfrac{a_{22}'}{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2} = \Delta_a^1(u'). \end{cases}$$

Wir bleiben noch bei der, für die Flächentheorie besonders wichtigen Annahme stehen, dass $a_{11} = E$ etc., also $A = ds^2$ ist. Unter dieser Voraussetzung soll der Index a, welcher die Form kennzeichnet, aus der die Coefficienten von $\Delta_a^1(\chi)$ etc. zu entnehmen sind, fortgelassen werden, sodass man z. B. hat

$$\Delta^1(\chi) = \frac{1}{T^2}\left[E\left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial \chi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2\right].$$

Diese Bezeichnung wurde schon im § 59 gelegentlich benutzt. Die Grössen $\Delta^1(\chi)$, $\Delta^2(\chi)$ sind von Beltrami als Differentialparameter erster und zweiter Ordnung der Function χ, die Grösse $\Delta(\chi, \varpi)$ als Zwischenparameter von χ und ϖ bezeichnet worden.

Nimmt man χ gleich u oder v und setzt

$$\Delta^1(u) = A, \quad \Delta(u, v) = B, \quad \Delta^1(v) = C, \tag{2}$$

so wird

$$\begin{cases} A = \dfrac{G}{EG - F^2}, \quad B = \dfrac{-F}{EG - F^2}, \quad C = \dfrac{E}{EG - F^2} \\ AC - B^2 = \dfrac{1}{EG - F^2}, \end{cases} \tag{3}$$

woraus umgekehrt

$$E = \frac{C}{AC - B^2}, \quad F = \frac{-B}{AC - B^2}, \quad G = \frac{A}{AC - B^2}. \tag{4}$$

Ferner wird allgemein

$$\Delta^1(\chi) = A\left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2 + 2B\frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial \chi}{\partial v} + C\left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2 \tag{5}$$

$$\Delta(\chi, \varpi) = A\frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial \varpi}{\partial u} + B\left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial \varpi}{\partial v} + \frac{\partial \varpi}{\partial u}\frac{\partial \chi}{\partial v}\right) + C\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial \varpi}{\partial v}. \tag{6}$$

Für den Differentialparameter zweiter Ordnung erhält man, wenn

$$\Delta^2(u) = A_0, \qquad \Delta^2(v) = C_0 \tag{7}$$

gesetzt wird,

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{T}\left(\dfrac{\partial \dfrac{G}{T}}{\partial u} - \dfrac{\partial \dfrac{F}{T}}{\partial v}\right) = -\dfrac{1}{T^2}(GJ_1 - 2FJ_1' + EJ_1'') \\ C_0 = \dfrac{1}{T}\left(\dfrac{\partial \dfrac{E}{T}}{\partial v} - \dfrac{\partial \dfrac{F}{T}}{\partial u}\right) = -\dfrac{1}{T^2}(GJ_2 - 2FJ_2' + EJ_2''), \end{cases} \tag{8}$$

und der allgemeine Ausdruck ist

$$\Delta^2(\chi) = A\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + 2B\frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} + C\frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} + A_0\frac{\partial \chi}{\partial u} + C_0\frac{\partial \chi}{\partial v}. \tag{9}$$

Was die Veränderung der Grössen Δ betrifft, wenn $f(\chi)$ für χ etc. gesetzt wird, so ist

$$\Delta_a^1(f(\chi)) = f'(\chi)^2\Delta_a^1(\chi) \tag{10}$$

$$\Delta_a(f(\chi), g(\bar{\omega})) = f'(\chi)\, g'(\bar{\omega})\, \Delta_a(\chi, \bar{\omega}) \tag{11}$$

$$\Delta_a^2(f(\chi)) = f'(\chi)\, \Delta_a^2(\chi) + f''(\chi)\, \Delta_a^1(\chi). \tag{12}$$

Geht man von einem beliebigen System krummliniger Coordinaten (u, v) zu einem rechtwinkligen (u', v') über, so bestehen die Gleichungen

$$\Delta^1(\chi) = A'\left(\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'}\right)^2 + C'\left(\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'}\right)^2 \tag{13}$$

$$\Delta(\chi, \bar{\omega}) = A'\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'}\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial u'} + C'\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'}\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial v'}, \tag{14}$$

in welchen nach (3) (für $F' = 0$) noch

$$A' = \frac{1}{E'}, \quad C' = \frac{1}{G'} \tag{15}$$

gesetzt werden kann. Ferner wird

$$\Delta^2(\chi) = \frac{1}{\sqrt{E'G'}}\left\{\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{G'}{E'}}\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'}\right)}{\partial u'} + \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{E'}{G'}}\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'}\right)}{\partial v'}\right\}, \tag{16}$$

und wenn man für E', G' die Werte aus (15) einführt,

$$\Delta^2(\chi) = \sqrt{A'C'}\left\{\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{A'}{C'}}\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'}\right)}{\partial u'} + \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{C'}{A'}}\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'}\right)}{\partial v'}\right\}.$$

Aus (9) ergibt sich

$$\Delta^2(\chi) = A'\frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial u'^2} + C'\frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial v'^2} + A_0'\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'} + C_0'\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'}, \tag{17}$$

und hierin haben die Grössen A_0', C_0' nach (8) die Werte:

$$\left\{\begin{aligned} A_0' &= \frac{1}{\sqrt{E'G'}}\frac{\partial \sqrt{\frac{G'}{E'}}}{\partial u'} = \frac{1}{2E'}\frac{\partial \log \frac{G'}{E'}}{\partial u'} = \frac{1}{2}A'\frac{\partial \log \frac{A'}{C'}}{\partial u'} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A'}{\partial u'} - \frac{A'}{C'}\frac{\partial C'}{\partial u'}\right) \\ C_0' &= \frac{1}{\sqrt{E'G'}}\frac{\partial \sqrt{\frac{E'}{G'}}}{\partial v'} = \frac{1}{2G'}\frac{\partial \log \frac{E'}{G'}}{\partial v'} = \frac{1}{2}C'\frac{\partial \log \frac{C'}{A'}}{\partial v'} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C'}{\partial v'} - \frac{C'}{A'}\frac{\partial A'}{\partial v'}\right). \end{aligned}\right. \tag{18}$$

§ 69.

Die zuletzt aufgestellten Gleichungen führen mit Leichtigkeit zur Kennzeichnung einer isometrischen Curvenschaar, d. h. einer solchen, welche geeignet ist, zusammen mit ihrer Orthogonalschaar die Fläche in unendlich kleine Quadrate zu teilen. Für ein System isometrischer Curven $u' = \text{const.}$, $v' = \text{const.}$ waren nach § 52 die Gleichungen

$$(1) \qquad F' = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log \frac{E'}{G'}}{\partial u' \partial v'} = 0$$

charakteristisch. Stellt man die zweite, unter Berücksichtigung der ersten, mit § 68 (18) zusammen, so erkennt man, dass sie sich in eine der beiden Formen

$$\frac{\partial}{\partial v'} \frac{A_0'}{A'} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u'} \frac{C_0'}{C'} = 0$$

setzen lässt, deren Integration liefert

$$\frac{\Delta^2(u')}{\Delta^1(u')} = f(u'), \qquad \frac{\Delta^2(v')}{\Delta^1(v')} = g(v').$$

Jede dieser beiden Gleichungen enthält nur eine der beiden Functionen u' und v', stellt daher die gesuchte Bedingung dar. Ist mithin $\varphi(u, v) = \text{const.}$ eine isometrische Curvenschaar, so genügt die Function φ einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$(2) \qquad \frac{\Delta^2(\varphi)}{\Delta^1(\varphi)} = f(\varphi).$$

Für gegebenes f lässt sich diese Gleichung noch vereinfachen. Führt man nämlich an Stelle von φ eine noch zu bestimmende Function $h(\varphi)$ als abhängige Variable ein, so geht nach § 68 (10, 12) die Gleichung über in

$$\Delta^2(h(\varphi)) = \frac{h'(\varphi) f(\varphi) + h''(\varphi)}{h'(\varphi)^2} \Delta^1(h(\varphi)).$$

Hierin werde nun über die Function h so verfügt, dass die Gleichung

$$h' f + h'' = 0$$

stattfindet; d. h. es werde

$$(3) \qquad h(\varphi) = A \int e^{-\int f(\varphi) d\varphi} d\varphi + B$$

gesetzt, wo A, B willkürliche Constanten bezeichnen und die Integrale als solche mit bestimmter unterer Grenze vorausgesetzt werden. Alsdann reducirt sich die Gleichung (2) auf

$$(4) \qquad \Delta^2(h(\varphi)) = 0,$$

und umgekehrt führt die Transformation (3) von dieser wieder zu der Gleichung (2).

Dass auch jeder Lösung einer Gleichung (2) eine isometrische Curvenschaar entspricht, ergibt sich unmittelbar. Denn die Gleichungen (2) und $F' = 0$ (oder $\Delta(\varphi, \psi) = 0$) leiten rückwärts wieder zu den Bedingungen (1).

Von der Orthogonalschaar kann leicht gezeigt werden, dass sie durch Quadraturen bestimmbar ist. Nach § 37 (12) ist nämlich zu ihrer Ermittelung die Integration der Gleichung

$$\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv = 0$$

erforderlich. Bezeichnet nun $\frac{\mu}{T}$ einen integrirenden Factor dieser Differentialgleichung, so besteht die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mu\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)}{T} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\mu\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)}{T}$$

oder

$$\mu\Delta^2(\varphi) + \frac{1}{T^2}\left[\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial\mu}{\partial v} + \left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial\mu}{\partial u}\right] = 0.$$

Hierin kann

$$\log\mu = g(\varphi)$$

genommen werden; denn dann ergibt sich

$$\Delta^2(\varphi) + g'(\varphi)\Delta^1(\varphi) = 0,$$

eine Gleichung, aus welcher wegen (2) in der That die Function g sich finden lässt. Es ist also

$$\frac{1}{T}e^{-\int f(\varphi)\,d\varphi}$$

ein integrirender Factor von $F' = 0$. —

Um eine weitere Anwendung der Theorie der Differentialparameter zu machen, bestimmen wir diese Grössen für den Fall, dass für die Functionen χ und ϖ die Cartesischen Coordinaten x, y, z der Fläche genommen werden. Der Differentialparameter 1. Ordnung von x und der Zwischenparameter von y und z sind schon im § 25 aufgestellt worden. Die dort mit (17) und (16) bezeichneten Gleichungen liefern in den jetzt eingeführten Zeichen:

(5) $$\Delta^1(x) = Y^2 + Z^2 = 1 - X^2$$

(6) $$\Delta(y, z) = -YZ.$$

Um den Differentialparameter 2. Ordnung von x zu finden, recurriren wir auf die Formeln [§ 11 (7, 8)]

$$\frac{1}{T}\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right) = Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{1}{T}\left(G\frac{\partial x}{\partial u} - F\frac{\partial x}{\partial v}\right) = -\left(Y\frac{\partial z}{\partial v} - Z\frac{\partial y}{\partial v}\right).$$

Dann folgt:

$$\Delta^2(x) = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Benutzt man jetzt die Formeln § 26 (5), so ergibt sich

$$\Delta^2(x) = -\frac{\eta + \vartheta'}{T^2}X,$$

d. h. nach § 12 (12):

(7) $$\Delta^2(x) = HX,$$

nebst den beiden analogen Gleichungen für y und z. Diese Relationen sind von besonderer Wichtigkeit für die Theorie der sogenannten Minimalflächen, welche durch die Eigenschaft

$$H = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = 0$$

charakterisirt werden. Die für die Coordinaten irgend einer solchen Fläche geltenden Gleichungen

$$\Delta^2(x) = 0, \quad \Delta^2(y) = 0, \quad \Delta^2(z) = 0$$

besagen nach dem Vorhergehenden, dass die Curven, welche auf der Fläche durch eine Schaar paralleler Ebenen bestimmt werden, eine Schaar isometrischer Linien bilden.

§ 70.

Schreiten wir nunmehr zur simultanen Transformation zweier quadratischen Differentialformen fort und nehmen demgemäss ein zweites Paar von Formen

$$b_{11}\,du^2 + 2b_{12}\,du\,dv + b_{22}\,dv^2 = \mathsf{B}$$
$$b_{11}'\,du'^2 + 2b_{12}'\,du'\,dv' + b_{22}'\,dv'^2 = \mathsf{B}'$$

hinzu, welche durch dieselbe Transformation in einander übergeführt werden sollen wie A und A'. Dann bestehen also gleichzeitig die Relationen

(1) $$\mathsf{A} = \mathsf{A}', \qquad \mathsf{B} = \mathsf{B}'.$$

Setzt man zunächst wieder $du = \xi$ etc. [§ 61 (3)], so gelten ausser den Gleichungen § 61 (7) auch diejenigen, welche durch Vertauschung von a_{ik} mit b_{ik} aus ihnen hervorgehen. — Das System der beiden Formen A und B besitzt drei algebraische Invarianten, nämlich die beiden Determinanten und die in den a_{ik} und b_{ik} bilineare Grösse $a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} + a_{11}b_{22}$. Denn man beweist hinsichtlich der letzteren leicht das Bestehen der Gleichung

(2) $$a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} + a_{11}b_{22} = \Delta'^2(a_{22}'b_{11}' - 2a_{12}'b_{12}' + a_{11}'b_{22}').$$

Durch Division ergeben sich zwei absolute simultane Invarianten, nämlich

(3) $$\frac{a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} + a_{11}b_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = H_{ab}$$

(4) $$\frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = K_{ab}.$$

Es ist also

(5) $$H_{ab} = H_{a'b'}, \qquad K_{ab} = K_{a'b'}.$$

Bedeuten h und k eindeutige Functionen von H_{ab} und K_{ab}, so besteht offenbar gleichzeitig mit den Gleichungen (1) auch die folgende:

$$hA + kB = h'A' + k'B', \tag{6}$$

d. h. $hA + kB$ ist eine Covariante des Systems A, B. Es existirt aber eine quadratische Covariante, welche sich nicht als homogene lineare Function der beiden Grundformen darstellen lässt. Man gelangt zu ihr durch Bildung der Functionaldeterminante von A und B. Bei einer Differentiation der Gleichungen (1) nach ξ und η ergibt sich nämlich, in Verbindung mit § 61 (6):

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \xi} = \alpha \frac{\partial A'}{\partial \xi'} + \gamma \frac{\partial A'}{\partial \eta'}, & \frac{\partial A}{\partial \eta} = \beta \frac{\partial A'}{\partial \xi'} + \delta \frac{\partial A'}{\partial \eta'} \\ \frac{\partial B}{\partial \xi} = \alpha \frac{\partial B'}{\partial \xi'} + \gamma \frac{\partial B'}{\partial \eta'}, & \frac{\partial B}{\partial \eta} = \beta \frac{\partial B'}{\partial \xi'} + \delta \frac{\partial B'}{\partial \eta'}, \end{cases} \tag{7}$$

mithin ist

$$D(A, B) = \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial \xi}, & \frac{\partial A}{\partial \eta} \\ \frac{\partial B}{\partial \xi}, & \frac{\partial B}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial A'}{\partial \xi'}, & \frac{\partial A'}{\partial \eta'} \\ \frac{\partial B'}{\partial \xi'}, & \frac{\partial B'}{\partial \eta'} \end{vmatrix},$$

d. h.

$$D(A, B) = \Delta' . D(A', B'). \tag{8}$$

Dividirt man diese Gleichung durch § 63 (8) und setzt

$$\frac{D(A, B)}{4\sqrt{|a|}} = \Gamma = c_{11}du^2 + 2c_{12}dudv + c_{22}dv^2, \tag{9}$$

so wird

$$\Gamma = \Gamma', \tag{10}$$

und die Coefficienten c_{ik} haben die Werte

$$\begin{cases} c_{11} = -\frac{a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12}}{\sqrt{|a|}}, & c_{12} = \frac{1}{2}\frac{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}}{\sqrt{|a|}}, \\ c_{22} = \frac{a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}}{\sqrt{|a|}}. \end{cases} \tag{11}$$

Die Gleichung (10) kann auch mit Hilfe von § 63 ((2) oder (4)) abgeleitet werden. Löst man nämlich die beiden letzten Gleichungen (7) nach $\frac{\partial B'}{\partial \xi'}$ und $\frac{\partial B'}{\partial \eta'}$ auf und benutzt § 63 (8), so kann man schreiben

$$\frac{1}{\sqrt{|a'|}}\frac{\partial B'}{\partial \eta'} = \alpha \frac{1}{\sqrt{|a|}}\frac{\partial B}{\partial \eta} - \beta \frac{1}{\sqrt{|a|}}\frac{\partial B}{\partial \xi}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{|a'|}}\frac{\partial B'}{\partial \xi'} = \gamma \frac{1}{\sqrt{|a|}}\frac{\partial B}{\partial \eta} - \delta \frac{1}{\sqrt{|a|}}\frac{\partial B}{\partial \xi}.$$

D. h. es kann in den Gleichungen § 63 (1) gesetzt werden

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2\sqrt{|a|}}\frac{\partial B}{\partial \eta}, & y = \frac{-1}{2\sqrt{|a|}}\frac{\partial B}{\partial \xi} \\ x' = \frac{1}{2\sqrt{|a'|}}\frac{\partial B'}{\partial \eta'}, & y' = \frac{-1}{2\sqrt{|a'|}}\frac{\partial B'}{\partial \xi'} \end{cases} \tag{12}$$

oder, wenn man zu der ursprünglichen Bedeutung von $\xi, \eta, \ldots$ zurückgeht:

$$(13)\quad \begin{cases} \delta u = \frac{1}{\sqrt{|a|}}(b_{12}\,du + b_{22}\,dv), & \delta v = \frac{-1}{\sqrt{|a|}}(b_{11}\,du + b_{12}\,dv) \\ \delta u' = \frac{1}{\sqrt{|a'|}}(b_{12}'\,du' + b_{22}'\,dv'), & \delta v' = \frac{-1}{\sqrt{|a'|}}(b_{11}'\,du' + b_{12}'\,dv'). \end{cases}$$

Diese Werte liefern, in § 63 (4) substituirt, wieder die vorher aufgestellte Relation.

Was den Ausdruck von Γ durch A und B anlangt, so lässt sich das Quadrat von Γ als homogene Function zweiten Grades der beiden gegebenen Formen darstellen. Denn es ergibt sich ohne Schwierigkeit:

$$(14)\qquad \Gamma^2 = -K_{ab}\mathsf{A}^2 + H_{ab}\mathsf{AB} - \mathsf{B}^2.$$

§ 71.

Setzt man in den Formeln des vorigen Paragraphen

$$(1)\qquad a_{11} = E, \quad a_{12} = F, \quad a_{22} = G$$

$$(2)\qquad b_{11} = L, \quad b_{12} = M, \quad b_{22} = N,$$

also $\mathsf{A} = ds^2$, $\mathsf{B} = \frac{ds^2}{\varrho}$, so wird

$$(3)\quad \begin{cases} H_{ab} = H = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \\ K_{ab} = K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}. \end{cases}$$

Es steht von vornherein zu erwarten, dass diejenigen Flächen, für welche in ihrer ganzen Ausdehnung die eine dieser Invarianten eine bestimmte Function der anderen ist, interessante Eigenschaften besitzen werden. Ein wichtiger Satz, welcher von ihnen gilt, wird sich im IV. Abschnitt ergeben. Zu diesen Flächen, auf welche Weingarten zuerst die Aufmerksamkeit gelenkt hat und welche daher als **Weingarten'sche Flächen** bezeichnet werden sollen, gehören u. a. diejenigen, für welche H oder K gleich Null ist. Eine Eigenschaft der ersteren ist am Schlusse des § 69 angegeben worden; dagegen sind die letzteren hier durchgehends von der Untersuchung ausgeschlossen.

Die Grösse Γ erhält für die jetzigen Annahmen den Ausdruck

$$(4)\qquad \Gamma = \frac{1}{T}[-\vartheta\,du^2 + (\eta - \vartheta')\,du\,dv + \eta'\,dv^2],$$

und die Gleichung § 70 (14) wird [§ 26 (10)]:

$$(5)\qquad \Gamma^2 = ds^4\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Die Formel (4) führt darauf, auch für zwei beliebige Differentialformen A, B Coefficientenverbindungen einzuführen, welche den Grössen $\eta \ldots \vartheta'$ analog sind. Es sei

$$(6) \quad \begin{cases} a_{12}b_{12} - a_{22}b_{11} = \partial_{11}, & a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12} = \partial_{12} \\ a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12} = \partial_{21}, & a_{12}b_{12} - a_{11}b_{22} = \partial_{22}. \end{cases}$$

Dann wird

$$(7) \quad \begin{cases} \partial_{11} + \partial_{22} = -a H_{ab} \\ \partial_{11}\partial_{22} - \partial_{12}\partial_{21} = a^2 K_{ab}, \end{cases}$$

und vermöge § 70 (11):

$$(8) \quad c_{11} = -\frac{\partial_{12}}{\sqrt{|a|}}, \quad c_{12} = \frac{\partial_{11} - \partial_{22}}{2\sqrt{|a|}}, \quad c_{22} = \frac{\partial_{21}}{\sqrt{|a|}}.$$

Hieraus ergibt sich die Determinante $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = c$ der Form Γ in der Gestalt:

$$(9) \quad c = -\frac{1}{4|a|}[4\partial_{12}\partial_{21} + (\partial_{11} - \partial_{22})^2] = -\frac{|a|}{4}(H_{ab}^2 - 4K_{ab});$$

und man könnte durch eine Rechnung, welche sich von der im § 12 für D angestellten nur durch die Bezeichnungen unterscheidet, nachweisen, dass für $a > 0$ c stets < 0 ist.

Von den Formen $h\mathsf{A} + k\mathsf{B}$ ist für den Fall der Flächentheorie das Quadrat des Linienelements der Gauss'schen Kugel besonders bemerkenswert; denn es ist nach § 25 (3)

$$(10) \quad d\sigma^2 = H\mathsf{B} - K\mathsf{A}.$$

Ausserdem wären zu erwähnen $H\mathsf{A} - 2\,\mathsf{B}$ und $2K\mathsf{A} - H\mathsf{B}$. Die erste Form gibt, gleich Null gesetzt, in jedem Punkte der Fläche diejenigen Normalschnitte an, für welche

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$$

ist; die zweite liefert in derselben Weise

$$\varrho = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2).$$

Die bilinearen Differentialformen, welche gleichzeitig mit den quadratischen A und B transformirt werden, haben folgende flächentheoretische Bedeutung. Nach § 4 (6) ist

$$(11) \quad \mathfrak{A} = E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G dv\delta v = ds\delta s \cos w,$$

wo w den, von den beiden Linienelementen ds und δs gebildeten Winkel bezeichnet. Werden die Differentiale $dx, \delta x, \ldots$ eingeführt, welche ds und δs bestimmen, so ergibt sich, ebenfalls nach § 4:

$$(12) \quad \mathfrak{A} = \Sigma dx\delta x.$$

Eine geometrische Darstellung von

$$\mathfrak{B} = L du\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + N dv\delta v$$

ist schon § 22 (5) gegeben worden. Man kann aber auch setzen

$$\mathfrak{B} = -\Sigma dX\delta x, \tag{13}$$

wie mit Hilfe der Gleichungen § 11 (4, 5) unmittelbar erkannt wird. Sind A, B, C benachbarte Punkte einer Fläche mit den Coordinaten (x, y, z), $(x + dx, \ldots)$, $(x + \delta x, \ldots)$, A', B', C' die entsprechenden Punkte auf der Gauss'schen Kugel, so sind $\frac{dX}{d\sigma}$, $\frac{dY}{d\sigma}$, $\frac{dZ}{d\sigma}$ die Richtungscosinus von $A'B'$, und der Ausdruck $\sum \frac{dX}{d\sigma}\frac{\delta x}{\delta s}$ stellt den Cosinus des Winkels w' dar, welchen $A'B'$ und AC mit einander bilden. Demnach erhält man

$$\mathfrak{B} = -d\sigma\delta s \cos w'. \tag{14}$$

Setzt man nach § 25 (4)

$$d\sigma = ds\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2^2}}$$

und vergleicht den neuen Ausdruck von $\mathfrak{B}$ mit dem früheren, so ergibt sich

$$\cos w' = -\frac{\frac{\cos\psi\cos\psi'}{\varrho_1} + \frac{\sin\psi\sin\psi'}{\varrho_2}}{\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_2^2}}}. \tag{15}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich eine interessante Folgerung ziehen. Ist nämlich

$$\frac{\cos\psi\cos\psi'}{\varrho_1} + \frac{\sin\psi\sin\psi'}{\varrho_2} = 0,$$

also die Richtung AC conjugirt zu AB, so wird $w' = \frac{\pi}{2}$; d. h. die Tangente der Gauss'schen Kugel, welche einer gegebenen Flächentangente entspricht, steht senkrecht auf derjenigen Richtung, welche zu letzterer conjugirt ist.

Gehört z. B. AB einer asymptotischen Richtung an, welche also sich selbst conjugirt ist, so ist die entsprechende Tangente der Gauss'schen Kugel auf ihr senkrecht. In der That kann die Bestimmungsgleichung der Asymptotenlinien in der Form

$$\Sigma dx dX = 0$$

geschrieben werden. — Kennzeichnet ferner AB eine Haupttangente, so steht $A'B'$ auf der zweiten Haupttangente senkrecht, oder ist AB parallel. Dies liefert die Gleichungen

$$\frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dY} = \frac{dz}{dZ},$$

welche im § 40 auf einem anderen Wege gefunden wurden.

§ 72.

Legt man einer beliebigen binären Differentialform H eine flächentheoretische Bedeutung bei, versteht also unter u, v krummlinige Coordinaten, so definirt die Gleichung $H = 0$ so viele Curvenschaaren auf der Fläche, wie der Grad von H angibt. Im Besonderen stellt also

$$a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 = 0 \tag{1}$$

zwei Schaaren von Curven dar, welche für $a < 0$ reell sind. Die Krümmungslinien, die Asymptotencurven liefern Beispiele hierfür. Die Theorie der Invarianten und Covarianten der binären Formen steht, wie jetzt gezeigt werden soll, in engem Zusammenhange mit Grössen, welche die gegenseitige Lage solcher Curven kennzeichnen. Wir nehmen zu (1) noch eine zweite quadratische Gleichung

$$b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2 = 0 \tag{2}$$

(für $b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$) hinzu, geben u und v bestimmte Werte, und bezeichnen mit l_1, l_2; m_1, m_2 die beiden Paare von Flächentangenten, welche durch (1) und (2) definirt werden und durch den Punkt $(u\,v)$ hindurchgehen. Endlich seien

$$\lambda_1 = \frac{dv_1}{du_1}, \quad \lambda_2 = \frac{dv_2}{du_2}$$

$$\mu_1 = \frac{\delta v_1}{\delta u_1}, \quad \mu_2 = \frac{\delta v_2}{\delta u_2}$$

die Wurzeln der beiden Gleichungen (1) und (2). Um die Beziehungen der vier Geraden $l_1 \ldots m_2$ näher zu untersuchen, bilden wir ihr Doppelverhältnis

$$n = \frac{\sin(l_1\, m_1)}{\sin(m_1\, l_2)} : \frac{\sin(l_1\, m_2)}{\sin(m_2\, l_2)}. \tag{3}$$

Jeder der hier vorkommenden Winkel soll durch Drehung in positivem Sinne (§ 4) entstehen. — Dass schon die einfachen Sinus-Quotienten, in welchen einer und derselbe Strahl (z. B. m_1) enthalten ist, nicht von der Richtung abhängen, welche für diesen Strahl bevorzugt wird, ist unmittelbar ersichtlich.

Wendet man nun die Formel § 4 (8) an, so wird z. B.

$$\sin(l_1\, m_1) = \frac{T(du_1\,\delta v_1 - dv_1\,\delta u_1)}{ds_1\,\delta s_1},$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die übrigen Sinus. Setzt man die Werte in (3) ein, so folgt

$$n = \frac{du_1\,\delta v_1 - dv_1\,\delta u_1}{\delta u_1\,dv_2 - \delta v_1\,du_2} : \frac{du_1\,\delta v_2 - dv_1\,\delta u_2}{\delta u_2\,dv_2 - \delta v_2\,du_2},$$

(4) $$n = \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \mu_1} : \frac{\mu_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \mu_2},$$

$$n = \frac{(\lambda_1 - \mu_1)(\lambda_2 - \mu_2)}{(\lambda_2 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)} = \frac{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 - (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)}{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 - (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)}.$$

Hieraus erhält man weiter

(5) $$\frac{1+n}{1-n} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2) - 2(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)}.$$

Nun ist vermöge (1) und (2):

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2a_{12}}{a_{22}}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}}, \quad (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 4\,\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{22}^2}$$

$$\mu_1 + \mu_2 = -\frac{2b_{12}}{b_{22}}, \quad \mu_1\mu_2 = \frac{b_{11}}{b_{22}}, \quad (\mu_1 - \mu_2)^2 = 4\,\frac{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}}{b_{22}^2},$$

mithin

(6) $$\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^2 = \frac{(a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} + a_{11}b_{22})^2}{4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)},$$

d. h. nach § 70 (3, 4):

(7) $$\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^2 = \frac{H_{ab}^2}{4K_{ab}}.$$

Von besonderem Interesse ist die Annahme

$$n = -1;$$

dann bilden die Geraden $l_1 \ldots m_2$ ein System von vier harmonischen Strahlen, der Art, dass l_1 und l_2, m_1 und m_2 einander zugeordnet sind. Die Bedingung hierfür ist

(8) $$a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} + a_{11}b_{22} = 0 \quad \text{oder} \quad H_{ab} = 0.$$

Wollte man $n = +1$ setzen, so wäre diese Forderung nur dadurch zu erfüllen, dass eine der Determinanten a oder b verschwindet, d. h. dass die beiden Strahlen eines der beiden Paare zusammenfallen. Endlich liefert $n = 0$ die Gleichung

$$(a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} + a_{11}b_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = 0,$$

$$H_{ab}^2 - 4K_{ab} = 0,$$

d. h. die Resultante von (1) und (2). Mithin erfordert das Verschwinden des Doppelverhältnisses, dass ein Strahl des einen Paares mit einem Strahle des anderen coincidirt.

Wird jetzt die Aufgabe gestellt, ein Tangentenpaar zu finden, welches zu zwei gegebenen harmonisch ist, so ergibt sich dieses in folgender Weise. Es seien (1) und (2) die Bestimmungsgleichungen für die beiden gegebenen Paare, und

$$c_{11}du^2 + 2c_{12}dudv + c_{22}dv^2 = 0$$

die Gleichung des gesuchten. Dann ist nach (8):

$$a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12} + a_{11}c_{22} = 0$$
$$b_{22}c_{11} - 2b_{12}c_{12} + b_{11}c_{22} = 0.$$

Durch Elimination von c_{11}, $2c_{12}$, c_{22} folgt die gesuchte Gleichung:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} du^2 & -dudv & dv^2 \\ a_{22} & a_{12} & a_{11} \\ b_{22} & b_{12} & b_{11} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(10) \qquad (a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})du^2 + (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})dudv + (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})dv^2 = 0,$$

d. h. nach § 70 (9):

$$(11) \qquad D(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = 0.$$

In derselben Weise wird die Aufgabe gelöst, die Winkelhalbirungslinien zweier gegebenen Flächentangenten oder Curvenschaaren zu finden. Sie kann auch so formulirt werden: Zwei Tangenten zu suchen, welche zu zwei gegebenen harmonisch und auf einander senkrecht sind. Unter Beibehaltung derselben Bezeichnungen wie vorher erhält man zunächst wieder

$$a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12} + a_{11}c_{22} = 0,$$

und ferner als Bedingung der Orthogonalität nach § 6 (11):

$$Gc_{11} - 2Fc_{12} + Ec_{22} = 0.$$

Daraus folgt

$$(12) \quad (Ea_{12} - Fa_{11})du^2 + (Ea_{22} - Ga_{11})dudv + (Fa_{22} - Ga_{12})dv^2 = 0$$

als Bestimmungsgleichung für die Winkelhalbirungslinien der Tangenten, welche durch

$$a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 = 0$$

definirt werden.

Setzt man

$$a_{11} = L, \qquad a_{12} = M, \qquad a_{22} = N,$$

den Inflexionstangenten entsprechend (§ 14), so erhält man aus (12):

$$(EM - FL)du^2 + (EN - GL)dudv + (FN - GM)dv^2 = 0,$$

d. h. die Haupttangenten. Dies Resultat erhellt auch unmittelbar aus der Theorie der Indicatrix (§ 20). Denn die Inflexionstangenten fallen mit den Asymptoten, die Haupttangenten mit den Hauptaxen dieses Kegelschnitts zusammen, und die Winkel der ersteren Geraden werden von den letzteren halbirt.

§ 73.

Sind drei Paare von Geraden durch einen Punkt gegeben, und existirt ein viertes Paar, welches zu jedem der drei harmonisch ist

so sagt man bekanntlich, dass die gegebenen Geraden eine Involution bilden. Die Bedingung für eine solche ist nach dem Vorhergehenden leicht zu finden. Denn tritt zu den Gleichungen § 72 (1, 2) noch

$$c_{11}du^2 + 2c_{12}du\,dv + c_{22}dv^2 = 0$$

als Bestimmung für ein drittes Tangentenpaar hinzu, so gelten nach § 72 (8) die Relationen

$$\begin{aligned} a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12} + a_{11}c_{22} &= 0 \\ b_{22}c_{11} - 2b_{12}c_{12} + b_{11}c_{22} &= 0 \\ c_{22}c_{11} - 2c_{12}c_{12} + c_{11}c_{22} &= 0, \end{aligned}$$

aus welchen c_{11}, c_{12}, c_{22} zu eliminiren sind. So ergibt sich

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Denkt man sich nun die beiden ersten Paare als fest, das dritte als variabel, so liefert die Formel (1) eine Beziehung unter den Coefficienten c_{11}, c_{12}, c_{22}, welche letzteres bestimmen. Daher kann man noch eine Gerade des dritten Paares willkürlich annehmen, während der sechste Strahl der Involution alsdann eindeutig bestimmt ist.

Fallen die beiden Strahlen des variablen Paares in einen zusammen, so wird dieser als Doppelstrahl der Involution bezeichnet. Man findet die Doppelstrahlen auf folgendem Wege. Sind $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{B} = 0$, $\mathsf{E} = 0$ die drei Gleichungen, welche die angenommenen Tangentenpaare definiren, so kann man vermöge (1) Multiplicatoren k_1, k_2, k_3 so bestimmen, dass die Relation

$$k_1\mathsf{A} + k_2\mathsf{B} + k_3\mathsf{E} = 0$$

identisch, d. h. für beliebige Werte der Differentiale du, dv erfüllt ist. Es kann daher die Gleichung $\mathsf{E} = 0$ durch

$$k_1\mathsf{A} + k_2\mathsf{B} = 0 \tag{2}$$

ersetzt werden. Ihre Wurzeln müssen einander gleich sein, oder es muss die Discriminante von

$$(k_1a_{11} + k_2b_{11})du^2 + 2(k_1a_{12} + k_2b_{12})du\,dv + (k_1a_{22} + k_2b_{22})dv^2$$

verschwinden: d. h. das Verhältnis $k_1 : k_2$ wird durch die Formel

$$(k_1a_{11} - k_2b_{11})(k_1a_{22} - k_2b_{22}) - (k_1a_{12} - k_2b_{12})^2 = 0 \tag{3}$$

gegeben. Eliminirt man $\frac{k_1}{k_2}$ aus (2) und (3), so liefert die Resultante

$$(a_{11}\mathsf{B} - b_{11}\mathsf{A})(a_{22}\mathsf{B} - b_{22}\mathsf{A}) - (a_{12}\mathsf{B} - b_{12}\mathsf{A})^2 = 0 \tag{4}$$

die Doppelstrahlen selbst. Und wenn man nach § 70 (11)

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11} = c_{11}\sqrt{|a|} \\ a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11} = 2c_{12}\sqrt{|a|} \\ a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12} = c_{22}\sqrt{|a|} \end{cases}$$

setzt, so kommt

$$\begin{aligned} a_{11}\mathsf{B} - b_{11}\mathsf{A} &= \sqrt{|a|}\,(2c_{11}\,du\,dv + 2c_{12}\,dv^2) \\ a_{22}\mathsf{B} - b_{22}\mathsf{A} &= -\sqrt{|a|}\,(2c_{12}\,du^2 + 2c_{22}\,du\,dv) \\ a_{12}\mathsf{B} - b_{12}\mathsf{A} &= \sqrt{|a|}\,(-c_{11}\,du^2 + c_{22}\,dv^2), \end{aligned}$$

mithin aus (4):

$$(c_{11}\,du^2 + 2c_{12}\,du\,dv + c_{22}\,dv^2)^2 = 0.$$

Es werden daher endlich die Doppelstrahlen durch die Gleichung § 72 (11)

$$D(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = 0$$

bestimmt, oder sie bilden dasjenige Paar von geraden Linien, welches harmonisch ist zu jedem der beiden festen Paare der Involution.

Da ein Strahlenpaar, welches mit zwei anderen eine Involution bildet, nur der einen Bedingung (1) unterworfen ist, so kann man z. B. auch die Forderung stellen, es solle zu einem vierten

$$\alpha_{11}du^2 + 2\alpha_{12}\,du\,dv + \alpha_{22}dv^2 = 0$$

harmonisch sein. Dann tritt zur Bestimmung von $e_{11} : e_{12} : e_{22}$ ausser der Gleichung (1) oder $c_{22}c_{11} - 2c_{12}e_{12} + c_{11}e_{22} = 0$ noch die Relation

$$(6)\qquad \alpha_{22}c_{11} - 2\alpha_{12}e_{12} + \alpha_{11}e_{22} = 0$$

auf, sodass die Definitionsgleichung für das Paar selbst die Gestalt hat:

$$(7)\quad (\alpha_{11}c_{12} - \alpha_{12}c_{11})du^2 + (\alpha_{11}c_{22} - \alpha_{22}c_{11})du\,dv + (\alpha_{12}c_{22} - \alpha_{22}c_{12})dv^2 = 0.$$

Verlangt man anstatt der eben angenommenen Eigenschaft die Orthogonalität der beiden zusammengehörigen Tangenten, so tritt an die Stelle von (6) die Gleichung

$$Ge_{11} - 2Fe_{12} + Ee_{22} = 0,$$

und für (7) ist zu setzen:

$$(8)\quad (Ec_{12} - Fc_{11})du^2 + (Ec_{22} - Gc_{11})du\,dv + (Fc_{22} - Gc_{12})dv^2 = 0.$$

Endlich lässt sich ein Tangentenpaar finden, welches gleichzeitig mit zweimal zwei gegebenen Paaren in Involution steht. Werden nämlich ausser den Gleichungen § 72 (1, 2) die beiden:

$$\alpha_{11}du^2 + 2\alpha_{12}\,du\,dv + \alpha_{22}dv^2 = 0, \qquad \beta_{11}du^2 + 2\beta_{12}\,du\,dv + \beta_{22}dv^2 = 0$$

angenommen, und bezeichnen γ_{11}, γ_{12}, γ_{22} drei Grössen, welche aus den α_{ik} und β_{ik} ebenso gebildet sind wie c_{11}, c_{12}, c_{22} aus den a_{ik} und b_{ik}, so gelten die Relationen

$$c_{22}e_{11} - 2c_{12}e_{12} + c_{11}e_{22} = 0, \qquad \gamma_{22}e_{11} - 2\gamma_{12}e_{12} + \gamma_{11}e_{22} = 0,$$

aus welchen die gesuchte Bestimmungsgleichung folgt:

$$(9)\quad (\gamma_{11}e_{12} - \gamma_{12}e_{11})du^2 + (\gamma_{11}c_{22} - \gamma_{22}c_{11})du\,dv + (\gamma_{12}c_{22} - \gamma_{22}c_{12})dv^2 = 0.$$

§ 74.

Die in den Paragraphen 70 bis 73 angestellten Erörterungen beziehen sich nur auf die algebraische Theorie eines Systems von zwei oder mehr quadratischen Formen. Zur Auffindung solcher simultanen Invarianten und Covarianten, welche auch die Ableitungen der Coefficienten enthalten, bietet sich naturgemäss der Weg dar, auf die zweite und dritte flächentheoretische Fundamentalgleichung (§ 28) zu recurriren. Diese Gleichungen gelten für jedes System krummliniger Coordinaten. Geht man mithin zu einem neuen Coordinatensystem über, so müssen sich die linken Seiten der neuen Gleichungen aus den linken Seiten der alten in der Art zusammensetzen, dass das Verschwinden der letzteren das der ersteren nach sich zieht. Diese Ueberlegung gibt Veranlassung, die in Rede stehenden Ausdrücke für zwei beliebige Differentialformen A, B in die Rechnung einzuführen, ohne Rücksicht darauf, dass sie für $A = ds^2$, $B = \frac{ds^2}{\varrho}$ gleich Null sind. Wir setzen, mit Benutzung Weingarten'scher Zeichen:

$$\left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \lambda_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial v} - \lambda_{12}\left(\frac{12}{2}\right)_\lambda - \lambda_{12}\left(\frac{22}{2}\right)_\lambda - \left(\frac{12}{1}\right)_\lambda - \lambda_{11}\left(\frac{22}{1}\right)_\lambda\right)\right] = b_\lambda(u),$$

$$\left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial u} - \lambda_{22}\left(\frac{11}{2}\right)_\lambda + \lambda_{12}\left(\frac{11}{1}\right)_\lambda - \left(\frac{12}{2}\right)_\lambda - \lambda_{11}\left(\frac{12}{1}\right)_\lambda\right)\right] = b_\lambda(v).$$

Der Index λ an den Christoffel'schen Grössen $\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)$ (§ 65 (11)) deutet an, dass diese Grössen aus den Coefficienten der Differentialform A gebildet werden. Durch eine leichte Rechnung erkennt man zunächst, dass man auch setzen kann:

$$\left[\frac{1}{\gamma_\lambda}\left(\frac{\partial \lambda_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial v} - \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial \lambda}\left(\frac{11}{1}\right)_\lambda - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial \lambda}\left(\frac{12}{1}\right)_\lambda - \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial \lambda}\left(\frac{22}{1}\right)_\lambda\right)\right] = b_\lambda(u),$$

$$\left[\frac{1}{\gamma_\lambda}\left(\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial u} - \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial \lambda}\left(\frac{11}{2}\right)_\lambda - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial \lambda}\left(\frac{12}{2}\right)_\lambda - \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial \lambda}\left(\frac{22}{2}\right)_\lambda\right)\right] = b_\lambda(v).$$

Man hat hierzu nur die letzteren Grössen zu entwickeln und die Gleichungen § 28 (19) zu benutzen, welche in den jetzigen Bezeichnungen nach § 65 (12) geschrieben werden können:

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2a}\frac{\partial a}{\partial u} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}_a + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_a \\ \frac{1}{2a}\frac{\partial a}{\partial v} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_a + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}_a . \end{cases}$$

Zu der geforderten Transformation von $b_a(u)$ und $b_a(v)$ gelangt man nun in folgender Weise. Ersetzt man in § 63 (4) die Grössen a_{ik} durch die b_{ik}, gibt dann wieder den δu, δv ... die Werte (10), so erhält man nach der Methode des § 64 folgende Gleichung, welche den Formeln (7, 8) desselben Paragraphen entspricht:

$$(4)\qquad \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{22}\frac{\partial\chi}{\partial u} - b_{12}\frac{\partial\chi}{\partial v}}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{11}\frac{\partial\chi}{\partial v} - b_{12}\frac{\partial\chi}{\partial u}}{\sqrt{a}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a'}}\left[\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{b_{22}'\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial u'} - b_{12}'\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial v'}}{\sqrt{a'}}\right) + \frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{b_{11}'\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial v'} - b_{12}'\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial u'}}{\sqrt{a'}}\right)\right].$$

Hierin nehmen wir $\chi = u'$ und entwickeln, so ergibt sich:

$$(5)\qquad \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{b_{22}}{\sqrt{a}}\frac{\partial^2 u'}{\partial u^2} - 2\frac{b_{12}}{\sqrt{a}}\frac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v} + \frac{b_{11}}{\sqrt{a}}\frac{\partial^2 u'}{\partial v^2} + \left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{b_{22}}{\sqrt{a}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{b_{12}}{\sqrt{a}}\right]\frac{\partial u'}{\partial u}\right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{b_{11}}{\sqrt{a}} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{b_{12}}{\sqrt{a}}\right]\frac{\partial u'}{\partial v}\right\} = \frac{1}{\sqrt{a'}}\left[\frac{\partial}{\partial u'}\frac{b_{22}'}{\sqrt{a'}} - \frac{\partial}{\partial v'}\frac{b_{12}'}{\sqrt{a'}}\right],$$

in welche Gleichung noch für die zweiten Ableitungen der Function u' die Ausdrücke § 65 (13) eingeführt werden können. Für diese Werte gelten, wenn unter den Summenzeichen die Indices beibehalten, ferner $\left\{\begin{matrix}h\,i\\k\end{matrix}\right\}'$ durch $\left\{\begin{matrix}h\,i\\k\end{matrix}\right\}_{a'}$ ersetzt wird, folgende Bestimmungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 u'}{\partial u^2} + \sum_{h,i}\left\{\begin{matrix}h\,i\\1\end{matrix}\right\}_{a'}\frac{\partial u_h'}{\partial u}\frac{\partial u_i'}{\partial u} = \sum_r\left\{\begin{matrix}11\\r\end{matrix}\right\}_a\frac{\partial u'}{\partial u_r} \\ \frac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v} + \sum_{h,i}\left\{\begin{matrix}h\,i\\1\end{matrix}\right\}_{a'}\frac{\partial u_h'}{\partial u}\frac{\partial u_i'}{\partial v} = \sum_r\left\{\begin{matrix}12\\r\end{matrix}\right\}_a\frac{\partial u'}{\partial u_r} \\ \frac{\partial^2 u'}{\partial v^2} + \sum_{h,i}\left\{\begin{matrix}h\,i\\1\end{matrix}\right\}_{a'}\frac{\partial u_h'}{\partial v}\frac{\partial u_i'}{\partial v} = \sum_r\left\{\begin{matrix}22\\r\end{matrix}\right\}_a\frac{\partial u'}{\partial u_r} \end{cases}$$

Multiplicirt man hier mit b_{22}, $-2b_{12}$, b_{11} und addirt, so erhalten die Grössen $\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}_{a'}$, $2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_{a'}$, $\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}_{a'}$ die Coefficienten:

$$b_{11}\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 - 2b_{12}\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + b_{22}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2,$$
$$b_{11}\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} - b_{12}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + b_{22}\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u},$$
$$b_{11}\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 - 2b_{12}\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + b_{22}\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2,$$

welche nach § 62 (7) der Reihe nach gleich

$$\frac{b}{b'} b_{22}', \qquad -\frac{b}{b'} b_{12}', \qquad \frac{b}{b'} b_{11}'$$

oder auch, wegen $\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} = J'^2$, gleich

$$\frac{a}{a'} b_{22}', \qquad -\frac{a}{a'} b_{12}', \qquad \frac{a}{a'} b_{11}'$$

gesetzt werden können. Das Resultat ist, wenn die den Grössen $b_\alpha(u)$, $b_\alpha(v)$ analogen, aus A′ und B′ gebildeten mit $b_\alpha(u')$, $b_\alpha(v')$ bezeichnet werden:

$$(7) \qquad b_\alpha(u') = b_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial u'} + b_\alpha(v) \frac{\partial v}{\partial u'}.$$

Nimmt man andererseits in (4) $\chi = v'$ und vertauscht demnach auch in (6) u' mit v', so liefert die Durchführung der Rechnung:

$$(7') \qquad b_\alpha(v') = b_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial v'} + b_\alpha(v) \frac{\partial v}{\partial v'}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt noch, nach § 5 (10), § 63 (8):

$$(8) \qquad \sqrt{a}\, b_\alpha(v)\, du - \sqrt{a}\, b_\alpha(u)\, dv = \sqrt{a'}\, b_\alpha(v')\, du' - \sqrt{a'}\, b_\alpha(u')\, dv'.$$

Da für $A = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$, $B = L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2$ die Grössen $b_\alpha(u)$, $b_\alpha(v)$ in die linken Seiten der Relationen § 28 (21, 22) übergehen, so wird durch die Formeln (7) die Transformation der Fundamentalgleichungen geleistet.

Setzt man von vornherein $a_{11} = E$, $b_{11} = L$ etc., so kann man zu denselben Formeln einfacher auf directem Wege gelangen. Zu diesem Zweck schreibe man zunächst [nach § 29 (2)] die Fundamentalgleichungen in der Form

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial M}{\partial u} + \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial u} - \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \frac{\partial M}{\partial v} + \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Alsdann sind die Ableitungen der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung aus § 61 (8), die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten aus § 5 (4) herzustellen und die Gleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial X'}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial X'}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial u}$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial X'}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial X'}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial v}$$

hinzuzunehmen. Dividirt man hierauf jede der entstehenden Relationen durch § 5 (7), vertauscht endlich u, v mit u', v' (wobei die Umkehrungs-

formeln § 5 (10) zu benutzen sind), so erhält man wieder die gesuchten Resultate.

Sind A und B beliebige Differentialformen, deren Coefficienten also nicht durch Fundamentalgleichungen verbunden sind, so besagt die Gleichung (8), dass die Grösse

$$\sqrt{|a|}\, b_a(v)\, du - \sqrt{|a|}\, b_a(u)\, dv \tag{9}$$

eine lineare Covariante von A und B ist, deren Coefficienten, wie im Anfange dieses Paragraphen gefordert, auch die Ableitungen der a_{ik} und b_{ik} enthalten. Andere Covarianten derselben Art findet man, indem man die Gleichung § 63 (4) für irgend eine Form aufstellt und dann

$$\delta u = b_a(u), \qquad \delta v = b_a(v)$$

setzt, was nach den Formeln (7) gestattet ist. Endlich würde von solchen Covarianten aus die Bildung von Functionaldeterminanten zu Invarianten führen.

Eine andere Methode zur Herstellung invarianter und covarianter Ausdrücke der betrachteten Gestalt hat ihren Grund in einer cubischen Differentialform, welche, wie sich zeigen wird, für den Fall der Flächentheorie der im § 33 eingeführten entspricht. Ist sie gebildet, so hat man zur Auffindung von Invarianten und Covarianten nur wieder die algebraische Theorie der quadratischen und cubischen Formen zu verwerten.

§ 75.

Um die Ableitungen der Grössen b_{ik} herzustellen, welche schon im vorigen Paragraphen vorkamen, verfährt man am directesten so, dass man die Gleichungen § 61 (7) (nach Veränderung von a_{ik} in b_{ik}) nach u und v differentiirt. Wir führen, wie im § 65, für u, v, ... die Zeichen u_1, u_2, ... ein, setzen also

$$\alpha = \frac{\partial u_1'}{\partial u_1}, \quad \beta = \frac{\partial u_1'}{\partial u_2}, \quad \gamma = \frac{\partial u_2'}{\partial u_1}, \quad \delta = \frac{\partial u_2'}{\partial u_2}.$$

Dann lassen sich jene Gleichungen in die eine Formel

$$b_{ik} = \sum_{p,\,q} b'_{pq} \frac{\partial u_p'}{\partial u_i} \frac{\partial u_q'}{\partial u_k} \qquad (i, k = 1, 2) \tag{1}$$

zusammenziehen. Hier, wie im Folgenden, durchlaufen die Summationsbuchstaben stets die Werte 1, 2. Nimmt man jetzt die Ableitung nach u_l und ersetzt in der entstehenden Gleichung die Zeichen p und q einmal durch g und h, so ergibt sich, da

$$\frac{\partial b'_{pq}}{\partial u_l} = \frac{\partial b'_{pq}}{\partial u_1'}\frac{\partial u_1'}{\partial u_l} + \frac{\partial b'_{pq}}{\partial u_2'}\frac{\partial u_2'}{\partial u_l} = \sum_r \frac{\partial b'_{pq}}{\partial u_r'}\frac{\partial u_r'}{\partial u_l}$$

ist:

$$\frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} = \sum_{p,q,r} \frac{\partial b'_{pq}}{\partial u_r'}\frac{\partial u_p'}{\partial u_i}\frac{\partial u_q'}{\partial u_k}\frac{\partial u_r'}{\partial u_l} + \sum_{g,h} b'_{gh}\left(\frac{\partial u_g'}{\partial u_i}\frac{\partial^2 u_h'}{\partial u_k \partial u_l} + \frac{\partial u_h'}{\partial u_k}\frac{\partial^2 u_g'}{\partial u_i \partial u_l}\right). \tag{2}$$

Für die zweiten Differentialquotienten liefert die Formel § 65 (13), bei veränderter Bezeichnung der Indices:

$$\frac{\partial^2 u_\alpha'}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} + \sum_{\lambda,\mu} \left\{\begin{matrix}\lambda & \mu \\ \alpha & \end{matrix}\right\}_{\alpha'} \frac{\partial u_\lambda'}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\mu'}{\partial u_\gamma} = \sum_\nu \left\{\begin{matrix}\beta & \gamma \\ \nu & \end{matrix}\right\}_\alpha \frac{\partial u_\alpha'}{\partial u_\nu} \tag{3}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2).$$

Hierin setzen wir einmal:

$$\alpha = h, \qquad \beta = k, \qquad \gamma = l,$$

hierauf:

$$\alpha = g, \qquad \beta = i, \qquad \gamma = l.$$

Alsdann ergibt die Gleichung (2):

$$\frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} = \sum_{p,q,r} \frac{\partial b'_{pq}}{\partial u_r'}\frac{\partial u_p'}{\partial u_i}\frac{\partial u_q'}{\partial u_k}\frac{\partial u_r'}{\partial u_l} + \sum_{g,h} b'_{gh}\left[\frac{\partial u_g'}{\partial u_i}\left(\sum_\nu \left\{\begin{matrix}k & l \\ \nu & \end{matrix}\right\}_\alpha \frac{\partial u_h'}{\partial u_\nu} - \sum_{\lambda,\mu} \left\{\begin{matrix}\lambda & \mu \\ h & \end{matrix}\right\}_{\alpha'} \frac{\partial u_\lambda'}{\partial u_k}\frac{\partial u_\mu'}{\partial u_l}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial u_h'}{\partial u_k}\left(\sum_\nu \left\{\begin{matrix}i & l \\ \nu & \end{matrix}\right\}_\alpha \frac{\partial u_g'}{\partial u_\nu} - \sum_{\lambda,\mu} \left\{\begin{matrix}\lambda & \mu \\ g & \end{matrix}\right\}_{\alpha'} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_l}\right)\right].$$

Nun ist nach (1)

$$\sum_{g,h} b'_{gh}\frac{\partial u_g'}{\partial u_i}\frac{\partial u_h'}{\partial u_\nu} = b_{i\nu}, \qquad \sum_{g,h} b'_{gh}\frac{\partial u_g'}{\partial u_\nu}\frac{\partial u_h'}{\partial u_k} = b_{\nu k},$$

mithin

$$\frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - \sum_\nu b_{i\nu}\left\{\begin{matrix}k & l \\ \nu & \end{matrix}\right\}_\alpha - \sum_\nu b_{\nu k}\left\{\begin{matrix}i & l \\ \nu & \end{matrix}\right\}_\alpha = \sum_{p,q,r} \frac{\partial b'_{pq}}{\partial u'_r}\frac{\partial u_p'}{\partial u_i}\frac{\partial u_q'}{\partial u_k}\frac{\partial u_r'}{\partial u_l} \tag{4}$$
$$- \sum_{g,h} b'_{gh} \sum \left\{\begin{matrix}\lambda & \mu \\ h & \end{matrix}\right\}_{\alpha'} \frac{\partial u_g'}{\partial u_i}\frac{\partial u_\lambda'}{\partial u_k}\frac{\partial u_\mu'}{\partial u_l} - \sum_{g,h} b'_{gh} \sum \left\{\begin{matrix}\lambda & \mu \\ g & \end{matrix}\right\}_{\alpha'} \frac{\partial u_\lambda'}{\partial u_i}\frac{\partial u_h'}{\partial u_k}\frac{\partial u_\mu'}{\partial u_l}.$$

In der zweiten Summe rechts werde jetzt

$$g = p, \qquad \lambda = q, \qquad \mu = r, \qquad h = \nu,$$

in der dritten

$$\lambda = p, \qquad h = q, \qquad \mu = r, \qquad g = \nu$$

gesetzt. Dann erhält man

$$(5)\quad \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - \sum_\nu b_{i\nu}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ \nu \end{matrix}\right\}_a - \sum_\nu b_{\nu k}\left\{\begin{matrix} i\,l \\ \nu \end{matrix}\right\}_a$$
$$= \sum_{p,q,r}\left[\frac{\partial b'_{pq}}{\partial u_r'} - \sum_\nu b'_{p\nu}\left\{\begin{matrix} q\,r \\ \nu \end{matrix}\right\}_{a'} - \sum_\nu b'_{\nu q}\left\{\begin{matrix} p\,r \\ \nu \end{matrix}\right\}_{a'}\right]\frac{\partial u_p'}{\partial u_i}\frac{\partial u_q'}{\partial u_k}\frac{\partial u_r'}{\partial u_l}$$

Führt man endlich die Bezeichnung

$$(6)\quad \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - \sum_\nu\left[b_{i\nu}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ \nu \end{matrix}\right\}_a + b_{\nu k}\left\{\begin{matrix} i\,l \\ \nu \end{matrix}\right\}_a\right] = c_{ikl}$$

ein, so findet sich das Resultat:

$$(7)\quad c_{ikl} = \sum_{p,q,r} c'_{pqr}\frac{\partial u_p'}{\partial u_i}\frac{\partial u_q'}{\partial u_k}\frac{\partial u_r'}{\partial u_l}$$
$$(i, k, l = 1, 2).$$

Dies ist aber ein Gleichungssystem, welches für die Transformation einer trilinearen Differentialform charakteristisch ist. Denn setzt man in

$$(8)\quad \sum_{i,k,l} c_{ikl}\,du_i\,\delta u_k\,\mathfrak{d}u_l = \sum_{p,q,r} c'_{pqr}\,du_p'\,\delta u_q'\,\mathfrak{d}u_r':$$

$$(9)\quad du_p' = \sum_i \frac{\partial u_p'}{\partial u_i}du_i, \qquad \delta u_q' = \sum_k \frac{\partial u_q'}{\partial u_k}\delta u_k, \qquad \mathfrak{d}u_r' = \sum_l \frac{\partial u_r'}{\partial u_l}\mathfrak{d}u_l,$$

so folgen die Formeln (7), und umgekehrt führen diese mit Hilfe von (9) zur Gleichung (8).

Aus der Definitionsgleichung (6) der Grössen c_{ikl} folgt, dass wegen $b_{ik} = b_{ki}$

$$(10)\quad c_{ikl} = c_{kil}$$

ist. Das Formelsystem (7) ist also nur sechs Gleichungen äquivalent. Die Beziehungen der Grössen $b_a(u)$, $b_a(v)$ [§ 74 (1)] zu den neu eingeführten werden durch die Gleichungen

$$(11)\quad \begin{cases} b_a(u) = \frac{1}{a}(c_{221} - c_{122}) \\ b_a(v) = \frac{1}{a}(c_{112} - c_{121}). \end{cases}$$

gegeben. Demnach lassen die, für $a_{11} = E$, $b_{11} = L$ etc. geltenden Fundamentalgleichungen sich schreiben:

$$(12)\quad \begin{cases} c_{112} - c_{121} = 0 \\ c_{221} - c_{122} = 0. \end{cases}$$

Setzt man die drei verschiedenen Differentiale in (8) einander gleich, so geht die trilineare Form in eine cubische:

$$(13)\qquad \sum_{i,k,l} c_{ikl}\,du_i\,du_k\,du_l \equiv c_{111}\,du^3 + (c_{112} + 2c_{121})\,du^2\,dv + (c_{221} + 2c_{122})\,du\,dv^2 + c_{222}\,dv^3$$

über, welche demnach gleichzeitig mit den beiden quadratischen Differentialformen transformirt wird. Dass sie für den Fall der Flächentheorie mit § 33 (9) identisch wird, erkennt man, wenn man die Gleichungen (12) beachtet und dann

$$(14)\qquad c_{111} = P, \quad c_{112} = Q, \quad c_{221} = R, \quad c_{222} = S$$

setzt. Die Transformation dieser Fundamentalgrössen dritter Ordnung wird durch das Gleichungssystem (7) unmittelbar geliefert.

Die eben entwickelte, für die Transformation einer einzigen Form zuerst von Christoffel angewandte Methode würde, in derselben Art weiter ausgedehnt, zu Differentialformen höheren Grades führen, welche mit den gegebenen quadratischen Formen gleichzeitig transformirt werden. Doch wollen wir uns im Folgenden auf die cubische Form beschränken.

§ 76.

Zur Ableitung invarianter und covarianter Ausdrücke aus einer oder mehreren Formen bedient man sich zweckmässig einiger allgemeinen Sätze, welche auf der Beziehung zwischen den Differentialquotienten der gegebenen und der transformirten Formen beruhen. Diese Sätze sollen hier so weit angegeben werden, als sie im Folgenden Verwendung finden.

Es seien φ, ψ, χ, ... homogene Functionen beliebigen Grades der Variablen ξ, η, welche durch die Transformation § 61 (6) in φ', ψ', χ', ... übergeführt werden. Für den Fall, dass $\varphi = \mathsf{A}$, $\psi = \mathsf{B}$ ist, wo A, B quadratische Formen bedeuten, ist im § 70 nachgewiesen worden, dass die Functionaldeterminante beider Formen die Eigenschaft einer Covariante besitzt. Der dort gegebene Beweis gilt ungeändert für Formen beliebigen Grades. Denn es ist allgemein

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, & \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi}, & \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \end{vmatrix} = \Delta' \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi'}{\partial\xi'}, & \frac{\partial\varphi'}{\partial\eta'} \\ \frac{\partial\psi'}{\partial\xi'}, & \frac{\partial\psi'}{\partial\eta'} \end{vmatrix}.$$

Wir gehen jetzt zu den Ableitungen zweiter Ordnung fort und bezeichnen dieselben abgekürzt durch

$$\varphi_{ik} \qquad (i, k = 1, 2),$$

während die ersten Differentialquotienten durch einen einfachen Index gekennzeichnet werden sollen. Aus den Gleichungen

(2) $$\varphi_1 = \varphi_1'\alpha + \varphi_2'\gamma, \qquad \varphi_2 = \varphi_1'\beta + \varphi_2'\delta,$$

welche zur Bildung der Gleichung (1) gebraucht werden, folgt durch weitere Differentiation nach ξ und η:

(3) $$\begin{cases} \varphi_{11} = \varphi_{11}'\alpha^2 + 2\varphi_{12}'\alpha\gamma + \varphi_{22}'\gamma^2 \\ \varphi_{12} = \varphi_{11}'\alpha\beta + \varphi_{12}'(\alpha\delta + \beta\gamma) + \varphi_{22}'\gamma\delta \\ \varphi_{22} = \varphi_{11}'\beta^2 + 2\varphi_{12}'\beta\delta + \varphi_{22}'\delta^2. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke liefern durch eine Rechnung, welche formell mit einer im § 5 durchgeführten identisch ist, das Resultat:

(4) $$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix} = \Delta'^2 \begin{vmatrix} \varphi_{11}' & \varphi_{12}' \\ \varphi_{12}' & \varphi_{22}' \end{vmatrix}.$$

Die Determinante links:

$$| \varphi_{ik} | \qquad (i, k = 1, 2)$$

ist die Hesse'sche Determinante der Function φ; demnach ist die Hesse'sche Function einer Form beliebigen Grades eine algebraische Covariante (oder Invariante) dieser Form.

Aus (3), in Verbindung mit § 61 (7), ergibt sich ferner [cf. § 70 (2)]:

(5) $$a_{22}\varphi_{11} - 2a_{12}\varphi_{12} + a_{11}\varphi_{22} = \Delta'^2(a_{22}'\varphi_{11}' - 2a_{12}'\varphi_{12}' + a_{11}'\varphi_{22}').$$

Stellt man die, den Formeln (3) entsprechenden Gleichungen auch für zwei andere Formen ψ und χ auf, so erhält man durch eine Rechnung, welche der im § 5 angestellten ähnlich ist, das Resultat:

(6) $$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} \\ \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{vmatrix} = \Delta'^3 \begin{vmatrix} \varphi_{11}' & \varphi_{12}' & \varphi_{22}' \\ \psi_{11}' & \psi_{12}' & \psi_{22}' \\ \chi_{11}' & \chi_{12}' & \chi_{22}' \end{vmatrix}.$$

Es ist also die Determinante

$$[\varphi_{ik}, \psi_{ik}, \chi_{ik}] \qquad (i, k = 1, 2)$$

eine simultane algebraische Covariante (oder Invariante) der drei Formen φ, ψ, χ.

Wenn man aus einer Covariante einer gegebenen Form eine Invariante oder Covariante bildet, so ist diese auch Invariante oder Covariante der ursprünglichen Form. Dieser Satz folgt leicht aus den Definitionen, welche der Invariantentheorie zu Grunde liegen. Es sei nämlich

$$\varphi = a_{no}\xi^n + n a_{n-1,1}\xi^{n-1}\eta + \cdots + a_{on}\eta^n$$

die gegebene binäre Form, und es werde vermöge der linearen Transformation

$$\varphi = \varphi' = a_{no}'\xi'^n + \cdots + a_{on}'\eta'^n.$$

Ferner sei

$$\Phi = A_{m0}\xi^m + \cdots + A_{0m}\eta^m$$

eine Covariante von φ; d. h. man habe bei derselben Transformation wie vorher

$$\Phi = \Phi'.$$

Hierin ist

$$\Phi' = B_{m0}\xi'^m + \cdots + B_{0m}\eta'^m,$$

und es sind die Coefficienten $B_{\lambda\mu}$, abgesehen von einer bestimmten Potenz der Substitutionsdeterminante Δ', gleich Functionen $A'_{\lambda\mu}$ der a'_{ik}, welche in derselben Weise aus diesen Grössen gebildet sind wie die entsprechenden $A_{\lambda\mu}$ aus den a_{ik}. Nun ist eine Invariante J von Φ eine homogene Function der Grössen $A_{\lambda\mu}$, welche sich von der, aus den $B_{\lambda\mu}$ analog gebildeten Function nur um eine Potenz von Δ' unterscheidet:

$$J(A_{m0}, \ldots A_{0m}) = \Delta'^q J(B_{m0}, \ldots B_{0m}).$$

Setzt man für die $A_{\lambda\mu}$, $B_{\lambda\mu}$ ihre Ausdrücke ein, so erhält man, nachdem rechts noch eine Potenz von Δ' herausgezogen ist:

$$F(a_{n0}, \ldots a_{0n}) = \Delta'^r F(a_{n0}', \ldots a_{0n}'),$$

wo F wieder auf beiden Seiten dieselbe Function bedeutet. Hierdurch wird aber J als Invariante von φ gekennzeichnet.

Für die Covarianten erleidet der Beweis nur eine geringe Modification. Man hat von der Gleichung auszugehen

$$C_{p0}\xi^p + \cdots + C_{0p}\eta^p = \Delta'^s(C'_{p0}\xi'^p + \cdots + C'_{0p}\eta'^p),$$

in welcher die $C_{\alpha\beta}$ bestimmte Functionen desselben Grades der $A_{\lambda\mu}$, die $C'_{\alpha\beta}$ dieselben Functionen der Grössen $B_{\lambda\mu}$ sind. Setzt man wieder für die $A_{\lambda\mu}$, $B_{\lambda\mu}$ ihre Werte, ausgedrückt durch die a_{ik} und a'_{ik}, so werden die Coefficienten links Functionen der ersteren Grössen, die Coefficienten rechts, nach Absonderung einer Potenz von Δ', dieselben Functionen der letzteren. Damit ist die Function p^{ten} Grades als Covariante von φ dargethan.

Dass diese Ueberlegungen auch für Covarianten eines Systems von Formen bestehen bleiben, bedarf keiner näheren Ausführung. Und man kann nach denselben Principien offenbar auch statt einer Covariante ein simultanes System von solchen zur Bildung neuer Covarianten und Invarianten verwenden. So ist z. B., wie auch leicht durch Ausrechnung bewiesen werden kann, die Functionaldeterminante zweier Covarianten von φ selbst eine Covariante dieser Form.

§ 77.

Wenden wir jetzt einige der im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze auf eine cubische Form an und setzen, bei einfacherer Bezeichnung der Coefficienten als im § 75,

$$(1) \qquad a_1\xi^3 + 3a_2\xi^2\eta + 3a_3\xi\eta^2 + a_4\eta^3 = \mathsf{H}.$$

Bildet man zunächst die Hesse'sche Determinante, so ergibt sich, von dem Zahlenfactor 36 abgesehen, der Ausdruck

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_1\xi + a_2\eta, & a_2\xi + a_3\eta \\ a_2\xi + a_3\eta, & a_3\xi + a_4\eta \end{vmatrix} = (a_1a_3 - a_2^2)\xi^2 + (a_1a_4 - a_2a_3)\xi\eta + (a_2a_4 - a_3^2)\eta^2.$$

Diese Form wird als die quadratische Covariante von H bezeichnet. Ihre Determinante

$$(3) \qquad \begin{aligned} D_0 &= \tfrac{1}{4}\left[4(a_1a_3 - a_2^2)(a_2a_4 - a_3^2) - (a_1a_4 - a_2a_3)^2\right] \\ &= -\tfrac{1}{4}(a_1^2a_4^2 - 6a_1a_2a_3a_4 + 4a_1a_3^3 + 4a_2^3a_4 - 3a_2^2a_3^2) \\ &= -\tfrac{1}{4}D \end{aligned}$$

ist nach § 62 eine algebraische Invariante von (2), also, nach § 76, auch von H. Und zwar sieht man leicht, dass D_0 oder D bis auf einen numerischen Factor mit der Discriminante D' der cubischen Form übereinstimmt. Definirt man nämlich die Discriminante einer homogenen Function allgemein als die Resultante der ersten Ableitungen nach den Veränderlichen — diese in der Reihenfolge genommen, in welcher die Variablen in dem Ansatz der Function erscheinen —, so erhält man für die cubische Form nach der dialytischen Methode sofort:

$$(4) \qquad D' = 81\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \\ a_2 & 2a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_2 & 2a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 81\,D.$$

Ist $D > 0$, so hat die cubische Gleichung $\mathsf{H} = 0$ eine reelle und zwei complexe Wurzeln, also die Form H zwei complexe Linear-Factoren, während die Factoren der Covariante reell sind. Für $D < 0$ dagegen werden die Factoren ersten Grades der cubischen Form alle drei reell, die der Hesse'schen Covariante beide imaginär.

Wir setzen ferner die Functionaldeterminante der Form ihrer Hesse'schen Function an, welche nach alge... Covariante von H ist. Nach Fortlassung des ...ird er

$$(5)\quad \begin{array}{ll} a_1\xi^2 + 2a_2\xi\eta + a_3\eta^2, & a_2\xi^2 + 2a_3\xi\eta + a_4\eta^2 \\ 2(a_1a_3 - a_2^2)\xi + (a_1a_4 - a_2a_3)\eta, & (a_1a_4 - a_2a_3)\xi + 2(a_2a_4 - a_3^2)\eta \end{array} \equiv \alpha_1\xi^3 + 3\alpha_2\xi^2\eta + 3\alpha_3\xi\eta^2 + \alpha_4\eta^3,$$

wo die Grössen $\alpha_1 \ldots \alpha_4$ durch die Gleichungen

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = a_1^2a_4 + 2a_2^3 - 3a_1a_2a_3 \\ \alpha_2 = a_1a_2a_4 + a_2^2a_3 - 2a_1a_3^2 \\ \alpha_3 = -a_1a_3a_4 - a_2a_3^2 + 2a_2^2a_4 \\ \alpha_4 = -a_1a_4^2 - 2a_3^3 + 3a_2a_3a_4 \end{array} \right.$$

gegeben werden. Diese Form heisst die cubische Covariante von H. Ihre (von dem numerischen Factor befreite) Discriminante ist gleich der dritten Potenz von D. Die Realitätsverhältnisse der Linearfactoren der cubischen Covariante sind daher dieselben wie für die ursprüngliche Form.

Es sei jetzt wieder $\xi = du$, $\eta = dv$. Will man die Theorie der cubischen Differentialformen mit der Flächentheorie in allgemeine Beziehung setzen, so kann man folgendermassen verfahren. Es seien l_1, l_2, l_3 die drei Flächentangenten, welche durch die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der cubischen Gleichung

$$(7)\qquad a_1du^3 + 3a_2du^2dv + 3a_3du\,dv^2 + a_4dv^3 = 0$$

bestimmt werden. Ist λ diejenige Grösse, welche zur Kennzeichnung einer vierten Tangente l dient, so werde das Doppelverhältnis der vier Strahlen l_2, l_3, l_1, l gebildet, welches nach § 72 (4) den Wert hat:

$$n_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} : \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda}.$$

Die Gerade l kann durch die Bedingung $n_1 = -1$ fixirt werden, welche bewirkt, dass l der vierte harmonische Strahl zu l_2, l_3, l_1 ist. Vertauscht man diese Linien unter einander, so ergeben sich drei Doppelverhältnisse n_k, und damit auch drei Tangenten, welche den Annahmen

$$n_k = -1 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

entsprechen. Sie werden, wie die gegebenen, durch eine cubische Gleichung definirt, welche man erhält, wenn man

$$\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{1+n_k}{1-n_k}\right)^2 = 0$$

setzt und die linke Seite nach § 72 (5) als Function von λ, λ_1, λ_2, λ_3 bestimmt, endlich die symmetrischen Functionen der Wurzeln λ_k durch die Coefficienten von (7) ausdrückt.

Nun ist

$$(8)\qquad \frac{1+n_1}{1-n_1} = \frac{(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_1 - 2\lambda_2\lambda_3 + (\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_1)\lambda}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda)}.$$

Multiplicirt man diesen Wert mit den beiden analogen und führt die angedeutete Rechnung durch, so ergibt sich ohne Schwierigkeit:

$$(9)\qquad \prod_{k=1}^{3}\left(\frac{1+n_k}{1-n_k}\right)^2 = -\frac{27}{D}\left(\frac{\alpha_1+3\alpha_2\lambda+3\alpha_3\lambda^2+\alpha_4\lambda^3}{a_1+3a_2\lambda+3a_3\lambda^2+a_4\lambda^3}\right)^2.$$

Für die gesuchten Tangenten m_1, m_2, m_3 gilt daher die Bestimmungsgleichung

$$(10)\qquad \alpha_1 du^3 + 3\alpha_2 du^2 dv + 3\alpha_3 du dv^2 + \alpha_4 dv^3 = 0,$$

deren Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3 seien. Die linke Seite stellt die cubische Covariante der gegebenen Differentialform dar.

Es lässt sich leicht beweisen, dass die drei Paare $(l_1 m_1)$, $(l_2 m_2)$, $(l_3 m_3)$ eine Involution bilden. Um dies mit Hilfe von § 73 zu zeigen, setzen wir die quadratischen Gleichungen dieser Paare an. Nun ist

$$\lambda_1 du - dv = 0$$

die Bestimmung für l_1, und nach (8)

$$((\lambda_2+\lambda_3)\lambda_1 - 2\lambda_2\lambda_3)du + (\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_1)dv = 0$$

die Definitionsgleichung für m_1. Die Multiplication beider Formeln liefert

$$(11)\qquad \lambda_1(\lambda_2\lambda_1+\lambda_3\lambda_1-2\lambda_2\lambda_3)du^2 + 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_1^2)du\,dv + (2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)dv^2 = 0$$

als Gleichung für das Paar $(l_1 m_1)$; und die beiden andern würden sich durch cyklische Permutation der Indices ergeben. Dass die Determinante der neun Coefficienten von du^2, $2du\,dv$, dv^2 in den drei Gleichungen verschwindet, was nach § 73 (1) die Bedingung der Involution ist, folgt nun daraus, dass diese Gleichungen, mit $\lambda_2-\lambda_3$, $\lambda_3-\lambda_1$, $\lambda_1-\lambda_2$ multiplicirt und addirt, ein identisches Resultat liefern.

Um die Doppelstrahlen zu finden, empfiehlt es sich, die Gleichung (11) und die beiden analogen noch in eine einfachere Form zu setzen. Es ist

$$\lambda_1(\lambda_2\lambda_1+\lambda_3\lambda_1-2\lambda_2\lambda_3) = \lambda_1(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2) - 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{3(a_2\lambda_1-a_1)}{a_4}$$

$$\lambda_2\lambda_3-\lambda_1^2 = \lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) = \frac{3(a_2+a_3\lambda_1)}{a_4}$$

$$2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 = 3\lambda_1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) = \frac{3(a_3\lambda_1+a_2)}{a_4},$$

mithin erhält man an Stelle von (11):

$$(12)\qquad (a_1+a_2\lambda_1)du^2 + 2(a_2+a_3\lambda_1)du\,dv + (a_3+a_4\lambda_1)dv^2 = 0.$$

Nach § 73 hat man dasjenige Paar zu suchen, welches zu diesem und zu einem der beiden anderen, etwa

$$(a_1 + a_2\lambda_2)du^2 + 2(a_2 + a_3\lambda_2)du\,dv + (a_3 + a_4\lambda_2)\,dv^2 = 0$$

harmonisch ist. Seine Gleichung wird nach § 72 (10), bei Fortlassung des von Null verschiedenen Factors $\lambda_1 - \lambda_2$:

(13) $(a_1a_3 - a_2^2)du^2 + (a_1a_4 - a_2a_3)du\,dv + (a_2a_4 - a_3^2)dv^2 = 0.$

In der linken Seite erkennt man die quadratische Covariante (2).

Aus dem Vorhergehenden folgt noch, dass immer nur ein Elementenpaar der Involution gleichzeitig mit den Doppelstrahlen reell sein kann.

§ 78.

Bei den Entwickelungen dieses Abschnittes wurde ursprünglich von dem Zusammenhange ausgegangen, welcher zwischen der Flächentheorie und der Theorie der binären quadratischen Differentialformen stattfindet. Sollen die aufgestellten Formeln und Sätze ausdrücklich für diejenigen Formen verwertet werden, welche die Flächentheorie liefert, so ist stets die Grösse $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$ besonders auszuzeichnen, und zwar deshalb, weil ihre Coefficienten nur von den Ableitungen erster Ordnung der Cartesischen nach den krummlinigen Coordinaten abhängen. Betrachtet man grundsätzlich mit der gegebenen Fläche zusammen auch ihre Abbildung auf die Gauss'sche Kugel, so ist dieser Form die andere: $d\sigma^2 = \mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}du\,dv + \mathfrak{G}dv^2$ beizuordnen, welche mit jener die Eigenschaft teilt, eine beständig positive Determinante zu besitzen. — Bei einer Transformation der Coordinaten ist nun der Fall besonders wichtig, dass von beliebigen Variablen u, v zu den Parametern p, q der Krümmungslinien übergegangen wird. Eine solche Transformation muss stets zu reellen Resultaten führen; denn die Krümmungscurven sind für alle Flächen reell, während z. B. die Asymptotenlinien nur auf Flächen negativen Krümmungsmasses existiren. Die Fundamentalgrössen, welche sich auf die Wahl der Grössen p, q als Coordinaten beziehen, seien mit E^*, L^* etc. bezeichnet. Dann ergibt sich (cf. § 44)

(1) $$F^* = 0, \qquad M^* = 0$$

(2) $$L^* = E^*r_1, \qquad N^* = G^*r_2$$

(3) $$H = \frac{L^*}{E^*} + \frac{N^*}{G^*}, \qquad K = \frac{L^*N^*}{E^*G^*},$$

ferner nach § 25 (2):

(4) $$\mathfrak{E}^* = r_1^2E^*, \qquad \mathfrak{F}^* = 0, \qquad \mathfrak{G}^* = r_2^2G^*,$$

und wenn man noch mit A, B, C die durch T dividirten Grössen $-\vartheta$, $-\frac{1}{2}(\vartheta'-\eta)$, η' bezeichnet:

$$(5) \qquad A^* = 0, \qquad B^* = \tfrac{1}{2}\sqrt{E^*G^*}(r_2 - r_1), \qquad C^* = 0.$$

Daher gelten folgende Transformationsformeln:

$$(6) \quad \begin{cases} E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = E^* dp^2 + G^* dq^2 \\ L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = r_1 E^* dp^2 + r_2 G^* dq^2 \\ \mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du dv + \mathfrak{G} dv^2 = r_1^2 E^* dp^2 + r_2^2 G^* dq^2 \\ A du^2 + 2B du du + C dv^2 = (r_2 - r_1)\sqrt{E^* G^*}\, dp\, dq \end{cases}$$

und gleichzeitig mit diesen (§ 63) die allgemeineren:

$$(7) \quad \begin{cases} E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G dv\delta v = E^* dp\delta p + G^* dq\delta q \\ L du\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + N dv\delta v = r_1 E^* dp\delta p + r_2 G^* dq\delta q \\ \mathfrak{E} du\delta u + \mathfrak{F}(du\delta v + dv\delta u) + \mathfrak{G} dv\delta v = r_1^2 E^* dp\delta p + r_2^2 G^* dq\delta q \\ A du\delta u + B(du\delta v + dv\delta u) + C dv\delta v = \frac{r_2 - r_1}{2}\sqrt{E^* G^*}(dp\delta q + dq\delta p), \end{cases}$$

in welchen δu, δv, δp, δq irgendwelche Grössen bedeuten, die den Bedingungen

$$(8) \quad \begin{cases} \delta p = \frac{\partial p}{\partial u}\delta u + \frac{\partial p}{\partial v}\delta v \\ \delta q = \frac{\partial q}{\partial u}\delta u + \frac{\partial q}{\partial v}\delta v \end{cases}$$

genügen.

Die mit $b_a(p) = 0$, $b_a(q) = 0$ zu bezeichnenden Fundamentalgleichungen wurden bereits im § 44 gegeben, und der Ausdruck des Krümmungsmasses durch die Fundamentalgrössen erster Ordnung würde aus (11) desselben Paragraphen folgen. In übersichtlicherer Form ergibt sich dieser Wert aus § 67 (2):

$$(9) \qquad K = -\frac{1}{2\sqrt{E^*G^*}}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\sqrt{E^*G^*}}\frac{\partial G^*}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\sqrt{E^*G^*}}\frac{\partial E^*}{\partial q}\right)\right].$$

Im allgemeinen Fall können die Gleichungen $b_a(u) = 0$, $b_a(v) = 0$ noch in einer anderen Gestalt geschrieben werden, welche auf der Bevorzugung von $d\sigma^2 \equiv \mathsf{E}$ an Stelle von $ds^2 \equiv \mathsf{A}$ beruht. Nach den Formeln § 74 (1) und § 65 (16), in welchen letzteren die Grössen $\mathfrak{J}$ (§ 30) für die J zu setzen sind, hat man zu definiren:

$$(10) \quad \begin{cases} b_e(u) = \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} + L\mathfrak{J}_1'' + M(\mathfrak{J}_2'' - \mathfrak{J}_1') - N\mathfrak{J}_2'\right] \\ b_e(v) = \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} - L\mathfrak{J}_1' - M(\mathfrak{J}_2' - \mathfrak{J}_1) + N\mathfrak{J}_2\right]. \end{cases}$$

Nimmt man nun $F = 0$, $M = 0$, wodurch auch die Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ erfüllt wird, so ergibt sich

$$(11)\qquad \begin{cases} b_r(p) = \dfrac{1}{\mathfrak{E}^*\mathfrak{G}^*}\left[\dfrac{\partial N^*}{\partial p} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L^*}{\mathfrak{E}^*} + \dfrac{N^*}{\mathfrak{G}^*}\right)\dfrac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial p}\right] \\ b_e(q) = \dfrac{1}{\mathfrak{E}^*\mathfrak{G}^*}\left[\dfrac{\partial L^*}{\partial q} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L^*}{\mathfrak{E}^*} + \dfrac{N^*}{\mathfrak{G}^*}\right)\dfrac{\partial \mathfrak{E}^*}{\partial q}\right]. \end{cases}$$

Ferner ist nach § 44 (14):

$$\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial p} = 2\,\frac{N^*}{G^*}\frac{\partial N^*}{\partial p} - \left(\frac{N^*}{G^*}\right)^2\frac{\partial G^*}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}^*}{\partial q} = 2\,\frac{L^*}{E^*}\frac{\partial L^*}{\partial q} - \left(\frac{L^*}{E^*}\right)^2\frac{\partial E^*}{\partial q}.$$

Setzt man dies ein und vergleicht die entstehenden Ausdrücke mit den Werten von $b_a(p)$, $b_a(q)$, welche aus den linken Seiten von § 44 (12) durch Division mit E^*G^* hervorgehen, so folgt

$$(12)\qquad \begin{cases} b_e(p) = -\left(\dfrac{E^*}{L^*}\right)^3\dfrac{G^*}{N^*}\,b_a(p) = -\dfrac{1}{r_1^{\,3}r_2}\,b_a(p) \\ b_e(q) = -\dfrac{E^*}{L^*}\left(\dfrac{G^*}{N^*}\right)^3 b_a(q) = -\dfrac{1}{r_1 r_2^{\,3}}\,b_a(q), \end{cases}$$

d. h. es werden gleichzeitig mit $b_a(p)$ und $b_a(q)$ auch $b_e(p)$ und $b_r(q)$ gleich Null. Da endlich nach § 74 das Verschwinden der letzteren Grössen auch das von $b_r(u)$ und $b_e(v)$ nach sich zieht, so können die beiden in Rede stehenden Fundamentalgleichungen durch

$$(13)\qquad b_r(u) = 0, \qquad b_e(v) = 0$$

ersetzt werden.

Es sollen noch die Werte von $e_a(u)$, $e_a(v)$; $c_a(u)$, $c_a(v)$ berechnet werden. Um das erste Paar von Grössen zu finden, bezeichnen wir zunächst mit A, M zwei beliebige quadratische Differentialformen und mit N eine homogene lineare Function derselben,

$$N = hA + kM.$$

Dann wird nach § 74 (1):

$$n_a(u) = \frac{1}{a}\left[\frac{\partial(hl_{22}+km_{22})}{\partial u} - \frac{\partial(hl_{12}+km_{12})}{\partial v}\right.$$
$$- (hl_{22}+km_{22})\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_a + (hl_{12}+km_{12})\left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}_a - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_a\right]$$
$$\left. + (hl_{11}+km_{11})\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}_a\right],$$

d. h.

$$(14)\qquad n_a(u) = \frac{1}{a}\left[l_{22}\frac{\partial h}{\partial u} + m_{22}\frac{\partial k}{\partial u} - l_{12}\frac{\partial h}{\partial v} - m_{12}\frac{\partial k}{\partial v}\right.$$
$$\left. + hl_a(u) + km_a(u)\right],$$

und ebenso

$$(14') \qquad n_a(v) = \frac{1}{a}\Big[l_{11}\frac{\partial h}{\partial v} + m_{11}\frac{\partial k}{\partial v} - l_{12}\frac{\partial h}{\partial u} - m_{12}\frac{\partial k}{\partial u} + h l_a(v) + k m_a(v)\Big].$$

Setzt man hier $A = \mathsf{B}$, $M = \mathsf{A}$, $h = H$, $k = -K$, mithin $N = \mathsf{E}$, beachtet die Fundamentalgleichungen, sowie die für jede Form geltenden Identitäten

$$(15) \qquad a_a(u) \equiv 0, \qquad a_a(v) \equiv 0,$$

so ergibt sich:

$$(16) \qquad \begin{cases} c_a(u) = \frac{1}{T^2}\left(N\frac{\partial H}{\partial u} - G\frac{\partial K}{\partial u} - M\frac{\partial H}{\partial v} + F\frac{\partial K}{\partial v}\right) \\ c_a(v) = \frac{1}{T^2}\left(L\frac{\partial H}{\partial v} - E\frac{\partial K}{\partial v} - M\frac{\partial H}{\partial u} + F\frac{\partial K}{\partial u}\right), \end{cases}$$

oder, mit Hilfe von § 34 (5):

$$(17) \qquad \begin{cases} c_a(u) = -\frac{1}{T^4}[\eta' Q + (\vartheta' - \eta) R - \vartheta S] \\ c_a(v) = \frac{1}{T^4}[\eta' P + (\vartheta' - \eta) Q - \vartheta R]. \end{cases}$$

Die lineare Covariante § 74 (9) erhält daher den Ausdruck:

$$(18) \quad T[c_a(v)\,du - c_a(u)\,dv]$$
$$= \frac{1}{T^3}\{[\eta' P + (\vartheta' - \eta) Q - \vartheta R]du + [\eta' Q + (\vartheta' - \eta) R - \vartheta S]\,dv\}$$
$$= \frac{1}{T^3}\begin{vmatrix} Pdu + Qdv, & Qdu + Rdv, & Rdu + Sdv \\ E, & F, & G \\ L, & M, & N \end{vmatrix},$$

Die Determinante rechts ist nach dem Schema § 76 (6) gebildet, in welchem $\varphi = \frac{1}{6}\mathsf{E}$, $\psi = \frac{1}{2}\mathsf{A}$, $\chi = \frac{1}{2}\mathsf{B}$ zu nehmen ist. — Es wäre nicht schwer, diese Covariante durch flächentheoretische Grössen und ihre Differentiale darzustellen.

Um die Grössen $c_a(u)$, $c_a(v)$ zu finden, welche aus der Zusammenstellung von A mit der Form [§ 71 (4)]

$$\Gamma \equiv A du^2 + 2B du^2 + C dv^2 = \frac{1}{T}[-\vartheta du^2 - (\vartheta' - \eta) du dv + \eta' dv^2]$$

hervorgehen, ist es zweckmässig, die Gleichungen § 74 (2) zu benutzen. Dann wird:

$$(19) \qquad \begin{cases} c_a(u) = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial \frac{\eta'}{T^2}}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \frac{\vartheta' - \eta}{T^2}}{\partial v} - \frac{\vartheta}{T^2}J_1'' + \frac{\vartheta' - \eta}{T^2}J_1' + \frac{\eta'}{T^2}J_1\right] \\ c_a(v) = \frac{1}{T}\left[-\frac{\partial \frac{\vartheta}{T^2}}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \frac{\vartheta' - \eta}{T^2}}{\partial u} - \frac{\vartheta}{T^2}J_2'' + \frac{\vartheta' - \eta}{T^2}J_2' + \frac{\eta'}{T^2}J_2\right]. \end{cases}$$

Bei Ausführung der Differentiationen ergibt sich, mit Hilfe von § 28 (18), § 34 (3, 4):

$$(20)\quad \begin{cases} T^2 \dfrac{\partial \frac{\eta'}{T^2}}{\partial u} = FR - GQ - \eta' J_1 - (\vartheta' - \eta) J_1' + \eta' J_2' \\ T^2 \dfrac{\partial \frac{\vartheta' - \eta}{T^2}}{\partial v} = GQ - ES + 2(\vartheta J_1'' - \eta' J_2') \\ T^2 \dfrac{\partial \frac{\vartheta' - \eta}{T^2}}{\partial u} = GP - ER + 2(\vartheta J_1' - \eta' J_2) \\ T^2 \dfrac{\partial \frac{\vartheta}{T^2}}{\partial v} = FQ - ER + \vartheta J_1' + (\vartheta' - \eta) J_2' - \vartheta J_2'', \end{cases}$$

und hieraus weiter:

$$(21)\quad \begin{cases} c_a(u) = -\frac{1}{2T^3}(GQ - 2FR + ES) \\ c_a(v) = \frac{1}{2T^3}(GP - 2FQ + ER), \end{cases}$$

d. h. nach § 34 (5):

$$(22)\qquad c_a(u) = -\frac{1}{2T}\frac{\partial H}{\partial v}, \quad c_a(v) = \frac{1}{2T}\frac{\partial H}{\partial u}.$$

Die (mit 2 multiplicirte) Covariante § 74 (9) geht also hier einfach in das Differential der Invariante H über.

Das Bildungsgesetz des Zählers von dH, d. h. das Ausdruckes

$$G(Pdu + Qdv) - 2F(Qdu + Rdv) + E(Rdu + Sdv)$$

erkennt man aus § 76 (5). Denn nimmt man für die dort eingeführte quadratische Form das Quadrat des Linienelements, setzt also $a_{11} = E$ etc., ferner

$$\varphi = \frac{1}{6}\mathsf{H} = \frac{1}{6}(P\xi^3 + 3Q\xi^2\eta + 3R\xi\eta^2 + S\eta^3),$$

so erhält man den obigen Wert. Und ebenso wird der Zähler von dK die, in derselben Art aus $\frac{ds^2}{\varrho}$ und H gebildete, lineare Covariante.

IV. Abschnitt.

Specielle Flächen, welche mit einer gegebenen zusammenhängen.

§ 79.

Im § 40 ist nachgewiesen worden, dass die Normalen einer Fläche längs einer Krümmungslinie als Tangenten einer bestimmten Raumcurve betrachtet werden können. Diese Curve war zugleich geometrischer Ort der Krümmungsmittelpunkte derjenigen Hauptnormalschnitte welche durch die Tangenten der Krümmungslinie hindurchgehen. Die beiden Curvenschaaren, welche den beiden Schaaren von Krümmungslinien entsprechen, füllen eine Fläche mit zwei Schalen oder Mänteln aus. Sie wird als Ort der Hauptkrümmungscentra der gegebenen Fläche die Krümmungsmittelpunktsfläche der letzteren genannt. Jede Normale der Fläche berührt hiernach beide Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche. Uebertrügt man eine Benennung aus der Theorie der ebenen Curven auf die Flächentheorie, so kann man diese Fläche kürzer als Evolute der gegebenen, und die letztere als Evolvente der ersteren bezeichnen.

Die Gleichungen der Evolute ergeben sich unmittelbar aus ihrer Definition. Sind nämlich ξ, η, ζ ihre laufenden Coordinaten, so hat man

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi = x + \varrho X \\ \eta = y + \varrho Y \\ \zeta = z + \varrho Z, \end{cases}$$

wo ϱ aus der Formel [§ 12 (9)]

$$(2) \qquad (LN - M^2)\varrho^2 - (GL - 2FM + GN)\varrho + EG - F^2 = 0$$

zu entnehmen ist. Den beiden Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 entsprechen die beiden Schalen der Fläche.

Ist die gegebene Fläche durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

dargestellt, und soll auch die Evolute durch eine Gleichung zwischen Cartesischen Coordinaten repräsentirt werden, so hat man zunächst für X, Y, Z die Werte § 8 (4) zu setzen, wodurch für

$$\frac{\varrho}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}} = -\frac{1}{\varrho'}$$

die Ausdrücke

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi = x - \frac{1}{\varrho'} F_1 \\ \eta = y - \frac{1}{\varrho'} F_2 \\ \zeta = z - \frac{1}{\varrho'} F_3 \end{cases}$$

erhalten werden. Aus diesen Relationen, der Flächengleichung und [§ 18 (7)]

$$(4)\qquad (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)\varrho'^2 + \overline{H}\varrho' - \overline{K} = 0$$

sind die vier Grössen x, y, z, ϱ' zu eliminiren. Zu demselben Ziel führt die Elimination von u, v und ϱ aus (1) und (2).

Ist endlich für die gegebene Fläche z als Function von x und y bestimmt, so sind die Gleichungen (3, 4) nach § 8 (5), § 16 (8) für

$$\frac{\varrho}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = \alpha$$

zu ersetzen durch

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi = x - p\alpha \\ \eta = y - q\alpha \\ \zeta = z + \alpha, \end{cases}$$

$$(6)\qquad (rt - s^2)\alpha^2 - [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]\alpha + (p^2 + q^2 + 1) = 0.$$

In manchen Fällen ist es zweckmässig, in den Gleichungen (1) (und ähnlich in (3) und (5)) nach § 12 (5, 6)

$$\varrho = \frac{E + F\lambda}{L + M\lambda} = \frac{F + G\lambda}{M + N\lambda}$$

zu setzen und λ aus jenen Gleichungen und

$$(FN - GM)\lambda^2 + (EN - GL)\lambda + (EM - FL) = 0$$

zu eliminiren. Das Resultat der Rechnung muss nach den Ergebnissen des § 12 dasselbe sein wie vorher.

Die Existenz von Kreispunkten auf der gegebenen Fläche bedingt das Vorhandensein von Doppelpunkten auf der Evolute. Denn die beiden Hauptkrümmungscentra, welche zu einem Kreispunkte gehören, fallen zusammen, und die beiden Schalen der Evolute vereinigen sich. Besitzt die Evolvente eine Linie sphärischer Krümmung, so entspricht dieser eine Doppelcurve der Krümmungsmittelpunktsfläche. Doch existirt auf den Evoluten noch eine zweite Art von Doppellinien, wovon man sich in folgender Weise überzeugt. Es sei $(\xi\ \eta\ \zeta) \equiv A$ ein beliebiger Punkt des Raumes. Im Allgemeinen kann durch ihn mehr als eine Gerade gezogen werden, welche zu einer gegebenen Fläche f normal ist. Lässt man die Fusspunkte zweier solchen Normalen zu-

sammenfallen, so kann man beweisen, dass A in einen Hauptkrümmungsmittelpunkt von f übergeht. Die Coordinaten ξ, η, ζ sind alsdann einer Bedingung zu unterwerfen, welche, geometrisch gedeutet, wieder die Krümmungsmittelpunktsfläche darstellt. Wird jetzt vorausgesetzt, dass auch noch zwei der übrigen, durch A gehenden Normalen sich vereinigen, so fällt mit A noch ein Hauptkrümmungscentrum zusammen, welches im Allgemeinen nicht zu demselben Punkte von f gehört wie das erste. Dann ist A offenbar ein Doppelpunkt der Evolute. Da nun ferner nur eine Bedingung zur Erfüllung der neuen Annahme hinzutritt, so bilden solche Punkte auf der Evolute eine Curve.

Bei der Betrachtung von Flächenstücken der Evolute sollen, ebenso wie für die Urfläche, singuläre Punkte und Linien durch passende Begrenzung der Fläche ausgeschlossen werden.

§ 80.

Für die Rotationsflächen lassen sich die Evoluten nach den Resultaten des § 19 ohne Weiteres angeben. Denn die, zu einem Meridian gehörigen Hauptkrümmungscentra füllen die Evolute dieser Curve aus, während sämmtliche Krümmungsmittelpunkte längs eines Parallelkreises in einen Punkt der Rotationsaxe zusammenfallen. Es entsteht also die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche durch Rotation der Evolute der Meridiancurve um die Axe, während die andere Schale in die Axe selbst degenerirt.

Soll für das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

die Krümmungsmittelpunktsfläche dargestellt werden, so ist auf die Gleichungen (3, 4) des letzten Paragraphen zu recurriren. Die Formel (4) kann dabei [§ 18 (8)] in der Gestalt

$$\begin{vmatrix} F_{11} - \varrho' & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} - \varrho' & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} - \varrho' & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden. Da in der Flächengleichung die Variablen getrennt sind, so ist

$$F_{23} = 0, \qquad F_{31} = 0, \qquad F_{12} = 0,$$

und durch Entwickelung der Determinante ergibt sich, wenn man noch

$$-\frac{1}{\varrho'} = \alpha$$

setzt,

$$(\alpha F_{22}+1)(\alpha F_{33}+1)F_1^2+(\alpha F_{33}+1)(\alpha F_{11}+1)F_2^2 + (\alpha F_{11}+1)(\alpha F_{22}+1)F_3^2=0$$

oder

$$\frac{F_1^2}{\alpha F_{11}+1}+\frac{F_2^2}{\alpha F_{22}+1}+\frac{F_3^2}{\alpha F_{33}+1}=0. \tag{2}$$

Nimmt man nun

$$F(x,y,z)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

sodass

$$F_1=\frac{x}{a^2},\quad F_{11}=\frac{1}{a^2},\ldots$$

wird, so folgt aus § 79 (3):

$$\xi=x+\alpha\frac{x}{a^2};\qquad \eta=y+\alpha\frac{y}{b^2},\qquad \zeta=z+\alpha\frac{z}{c^2},$$

woraus umgekehrt durch Auflösung nach x, y, z:

$$x=\frac{a^2\xi}{a^2+\alpha},\quad y=\frac{b^2\eta}{b^2+\alpha},\quad z=\frac{c^2\zeta}{c^2+\alpha}. \tag{3}$$

Setzt man auch in (2) die Werte der Differentialquotienten ein, so erhält man

$$\frac{x^2}{a^2(a^2+\alpha)}+\frac{y^2}{b^2(b^2+\alpha)}+\frac{z^2}{c^2(c^2+\alpha)}=0 \tag{4}$$

und hat jetzt noch x, y, z, α aus (1), (3) und (4) zu eliminiren. Die Elimination der drei Coordinaten ist sehr einfach: es ergibt sich

$$\frac{a^2\xi^2}{(a^2+\alpha)^2}+\frac{b^2\eta^2}{(b^2+\alpha)^2}+\frac{c^2\zeta^2}{(c^2+\alpha)^2}=1, \tag{5}$$

$$\frac{a^2\xi^2}{(a^2+\alpha)^3}+\frac{b^2\eta^2}{(b^2+\alpha)^3}+\frac{c^2\zeta^2}{(c^2+\alpha)^3}=0. \tag{6}$$

Bezeichnet man die linke Seite von (5) mit $G(\alpha)$, so kann die Gleichung (6) in der Form

$$G'(\alpha)=0$$

geschrieben werden, wo $G'(\alpha)$ die partielle Ableitung von G nach α bedeutet. Die Ermittelung der Evolute des Ellipsoids ist hiernach auf die Bildung der Discriminante der Function $G(\alpha)$ reducirt. Die entstehende Gleichung wird vom 12. Grade.

Sollen die Coordinaten der Krümmungsmittelpunktsfläche als Functionen zweier Variablen bestimmt werden, so ist es zweckmässig, das Ellipsoid durch elliptische Coordinaten darzustellen. Zur Berechnung von ξ, η, ζ dienen die Gleichungen § 79 (1, 2), combinirt mit § 42 (14).

Ist ϱ_1 der Hauptkrümmungsradius, welcher zur u-Linie $v=$ const.

gehört, und hat ϱ_2 dieselbe Bedeutung für die v-Linie, so wird nach § 44 (3):

(7) $$\varrho_1 = \frac{E}{L}, \qquad \varrho_2 = \frac{G}{N}.$$

Die Werte der Fundamentalgrössen und der Richtungscosinus der Normale folgen aus § 42 (14). Und zwar hat man, wenn zur Abkürzung

(8) $$\begin{cases} (a^2 - u)(b^2 - u)(c^2 - u) = U \\ (a^2 - v)(b^2 - v)(c^2 - v) = V \end{cases}$$

gesetzt wird, nach § 43 (1):

(9) $$E = \frac{u(u - v)}{4U}, \qquad G = \frac{v(v - u)}{4V},$$

ferner

(10) $$L = \frac{abc(v - u)}{4U\sqrt{uv}}, \qquad N = \frac{abc(u - v)}{4V\sqrt{uv}},$$

(11) $$X = \frac{bc}{a}\frac{x}{\sqrt{uv}}, \quad Y = \frac{ca}{b}\frac{y}{\sqrt{uv}}, \quad Z = \frac{ab}{c}\frac{z}{\sqrt{uv}},$$

mithin

(12) $$\varrho_1 = -\frac{u\sqrt{uv}}{abc}, \qquad \varrho_2 = -\frac{v\sqrt{uv}}{abc},$$

und die eine Schale der Evolute wird dargestellt durch

$$\xi = x - \frac{ux}{a^2}, \quad \eta = y - \frac{uy}{b^2}, \quad \zeta = z - \frac{uz}{c^2},$$

oder, wenn für x, y, z ihre Ausdrücke gesetzt werden, durch

(13) $$\begin{cases} \xi^2 = \dfrac{(a^2 - u)^3 (a^2 - v)}{a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \qquad \eta^2 = \dfrac{(b^2 - u)^3 (b^2 - v)}{b^2(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \\ \zeta^2 = \dfrac{(c^2 - u)^3 (c^2 - v)}{c^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{cases}$$

Der Bereich von u und v ist nach § 42 durch die Ungleichungen $b^2 > u > c^2$, $a^2 > v > b^2$ gegeben. Für die zweite Schale der Evolute erhält man die Coordinaten durch Vertauschung von u und v. Bei der Elimination dieser Variablen ergibt sich offenbar in beiden Fällen dasselbe Resultat. Soll also die Krümmungsmittelpunktsfläche durch eine Relation unter Cartesischen Coordinaten dargestellt werden, so ist es unmöglich, die beiden Schalen analytisch von einander zu trennen.

§ 81.

Alle Grössen, welche sich auf die, zu $\varrho = \varrho_k$ gehörige Schale der Evolute beziehen, sollen durch den Index k gekennzeichnet werden. Dann gelten für die erste Schale die Gleichungen:

(1) $$x_1 = x + \varrho_1 X, \quad y_1 = y + \varrho_1 Y, \quad z_1 = z + \varrho_1 Z.$$

Zur Herstellung der Fundamentalgrössen erster Ordnung bilden wir

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + \varrho_1 \frac{\partial X}{\partial u} + X \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}, \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} + \varrho_1 \frac{\partial X}{\partial v} + X \frac{\partial \varrho_1}{\partial v}, \dots \end{cases}$$

woraus

$$(3)\qquad \begin{cases} E_1 = E - 2\varrho_1 L + \varrho_1^2 \mathfrak{E} + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2 \\ F_1 = F - 2\varrho_1 M + \varrho_1^2 \mathfrak{F} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \\ G_1 = G - 2\varrho_1 N + \varrho_1^2 \mathfrak{G} + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

Das Quadrat des Linienelements wird

$$(4)\qquad ds_1^2 = ds^2 - 2\varrho_1 \frac{ds^2}{\varrho} + \varrho_1^2 d\sigma^2 + d\varrho_1^2,$$

und weiter, wegen $d\sigma^2 = H\frac{ds^2}{\varrho} - K ds^2$:

$$(5)\qquad ds_1^2 = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\left(ds^2 - \varrho_1 \frac{ds^2}{\varrho}\right) + d\varrho_1^2.$$

Die Fundamentalgrössen selbst können in der Form

$$(6)\qquad \begin{cases} E_1 = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)(E - L\varrho_1) + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2 \\ F_1 = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)(F - M\varrho_1) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \\ G_1 = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)(G - N\varrho_1) + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2 \end{cases}$$

geschrieben werden, aus welcher mit Rücksicht auf

$$(7)\qquad (E - L\varrho_k)(G - N\varrho_k) - (F - M\varrho_k)^2 = 0$$

sich ergibt:

$$(8)\qquad T_1^2 = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\Big[(G - N\varrho_1)\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2 - 2(F - M\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} + (E - L\varrho_1)\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2\Big].$$

In (5) kann man einführen $\left(\text{für } \frac{1}{\varrho_k} = r_k\right)$:

$$(9)\qquad d\varrho_1 = \frac{dK - r_1 dH}{r_1^2(r_1 - r_2)},$$

und erhält dann eine Darstellung von ds_1^2 durch die beiden fund mentalen quadratischen Differentialformen, ihre simultanen Invariant und die Differentiale der letzteren. Diese Differentiale sind nach § (Schluss) noch als simultane Covarianten der beiden quadratischen Fo men und der im § 33 definirten cubischen Differentialform

$$\mathsf{H} = P du^3 + 3Q du^2 dv + 3R du dv^2 + S dv^3$$

ausdrückbar.

Um die Richtungscosinus der Normale herzustellen, ist es zweckmässig, die Gleichungen (2) in der Form zu setzen:

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \left(1 + \varrho_1 \frac{\eta}{T^2}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \varrho_1 \frac{\vartheta}{T^2}\frac{\partial x}{\partial v} + X\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}, \ldots \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = \varrho_1 \frac{\eta'}{T^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \left(1 + \varrho_1 \frac{\vartheta'}{T^2}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + X\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}, \ldots \end{cases}$$

Dann ergibt sich mit Hilfe von § 11 (7, 8), § 15 (3):

$$(11)\quad \frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} - \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{1}{T}\left\{\left[(F - M\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - (G - N\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right]\frac{\partial x}{\partial u}\right.$$
$$\left. + \left[-(E - L\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} + (F - M\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right]\frac{\partial x}{\partial v}\right\}.$$

Dieser Ausdruck ist noch durch T_1 zu dividiren. Dabei kann von vornherein eine Reduction vorgenommen werden, wenn man beachtet, dass wegen (7) die Determinante der in (8) vorkommenden quadratischen Form von $\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}$, oder der in (11) auftretenden bilinearen Form von $\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ verschwindet. Es ist aus diesem Grunde:

$$(12)\quad T_1^2 = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{1}{G - N\varrho_1}\left[(F - M\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - (G - N\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right]^2,$$

$$(13)\quad \frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} - \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{-1}{T(G - N\varrho_1)}\left[(F - M\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - (G - N\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right].$$
$$\left[(F - M\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial v} - (G - N\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial u}\right].$$

Hieraus folgt nun, wenn ε ein Vorzeichen bedeutet:

$$(14)\quad X_1 = \frac{(G - N\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial u} - (F - M\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial v}}{\varepsilon T\sqrt{(G - N\varrho_1)\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)}},$$

und analoge Ausdrücke ergeben sich für Y_1 und Z_1. Berücksichtigt man wieder die Gleichung (7), so kann man auch schreiben:

$$(15)\quad X_1 = \frac{(F - M\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial u} - (E - L\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial v}}{\varepsilon' T\sqrt{(E - L\varrho_1)\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)}}.$$

Die Vergleichung des Ausdrucks (14) mit § 44 (24) lehrt, dass die Normale der Evolute parallel ist der Tangente der zugehörigen Krümmungslinie im entsprechenden Punkte der Urfläche. Sieht man für die Krümmungsmittelpunktsflächen von der allgemeinen Festsetzung ab, welche für die positive Richtung einer Normale im § 8 getroffen wurde, und bevorzugt dieselbe Richtung wie im § 44, so kann man nach (23) dieses Paragraphen setzen:

$$(16)\qquad X_1 = \frac{(G - N\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial u} - (F - M\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial v}}{T(G - N\varrho_1)} \sqrt{\frac{G - N\varrho_1}{1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}}},$$

und analog für die zweite Schale:

$$(17)\qquad X_2 = \frac{(E - L\varrho_2)\frac{\partial x}{\partial v} - (F - M\varrho_2)\frac{\partial x}{\partial u}}{T(E - L\varrho_2)} \sqrt{\frac{E - L\varrho_2}{1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}}},$$

während Y_1, Z_1, Y_2, Z_2 sich durch cyklische Vertauschung von x, y, z ergeben.

Die Gleichung

$$(18)\qquad X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0,$$

welche aus der eben angegebenen geometrischen Thatsache folgt, ist leicht zu verificiren. Sie besagt, dass die Normalen (oder die Berührungsebenen) der beiden Mäntel der Evolute in entsprechenden Punkten auf einander senkrecht stehen.

§ 82.

Es bleibt noch übrig, die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der Evolute zu bestimmen. Hierzu werden die zweiten Ableitungen der Coordinaten gebraucht:

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \varrho_1 \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + 2\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} + X\frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \varrho_1 \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} + X\frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \varrho_1 \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} + 2\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} + X\frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial v^2}; \end{cases}$$

sie sind mit X_1 etc. zu multipliciren, die entstehenden Producte über x_1, y_1, z_1 zu summiren. Bei Ausführung dieser Operation treten die Grössen $\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}$ etc. auf, welche sich durch Differentiation der für L, M, N geltenden Gleichungen ergeben. So folgt:

$$(2)\quad L_1 = \frac{1}{T(G - N\varrho_1)} \sqrt{\frac{G - N\varrho_1}{1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}}} \Big\{ (G - N\varrho_1)(EJ_1 + FJ_2) - (F - M\varrho_1)(FJ_1 + GJ_2)$$
$$+ \varrho_1 \Big[(G - N\varrho_1)\Big(LJ_1 + MJ_2 - \frac{\partial L}{\partial u}\Big) - (F - M\varrho_1)\Big(LJ_1' + MJ_2' - \frac{\partial M}{\partial u}\Big)\Big]$$
$$+ 2\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\left[-(G - N\varrho_1)L + (F - M\varrho_1)M\right]\Big\},$$

nebst ähnlichen Ausdrücken für M_1 und N_1. Zur Vereinfachung empfiehlt es sich, die Fundamentalgrössen 3. Ordnung einzuführen; dann wird:

$$(3)\quad \begin{cases} L_1 = \frac{-1}{T(G-N\varrho_1)}\sqrt{\frac{G-N\varrho_1}{1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}}\Big[(G-N\varrho_1)\Big(P\varrho_1+2L\frac{\partial\varrho_1}{\partial u}\Big) \\ \qquad\qquad -(F-M\varrho_1)\Big(Q\varrho_1+2M\frac{\partial\varrho_1}{\partial u}\Big)\Big] \\ M_1 = \frac{-1}{T(G-N\varrho_1)}\sqrt{\frac{G-N\varrho_1}{1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}}\Big[(G-N\varrho_1)\Big(Q\varrho_1+L\frac{\partial\varrho_1}{\partial v}+M\frac{\partial\varrho_1}{\partial u}\Big) \\ \qquad\qquad -(F-M\varrho_1)\Big(R\varrho_1+M\frac{\partial\varrho_1}{\partial v}+N\frac{\partial\varrho_1}{\partial u}\Big)\Big] \\ N_1 = \frac{-1}{T(G-N\varrho_1)}\sqrt{\frac{G-N\varrho_1}{1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}}\Big[(G-N\varrho_1)\Big(R\varrho_1+2M\frac{\partial\varrho_1}{\partial v}\Big) \\ \qquad\qquad -(F-M\varrho_1)\Big(S\varrho_1+2N\frac{\partial\varrho_1}{\partial v}\Big)\Big]. \end{cases}$$

In derselben Art erhält man für die zweite Schale:

$$(4)\quad \begin{cases} L_2 = \frac{-1}{T(E-L\varrho_2)}\sqrt{\frac{E-L\varrho_2}{1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}}\Big[(E-L\varrho_2)\Big(Q\varrho_2+2M\frac{\partial\varrho_2}{\partial u}\Big) \\ \qquad\qquad -(F-M\varrho_2)\Big(P\varrho_2+2L\frac{\partial\varrho_2}{\partial u}\Big)\Big] \\ M_2 = \frac{-1}{T(E-L\varrho_2)}\sqrt{\frac{E-L\varrho_2}{1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}}\Big[(E-L\varrho_2)\Big(R\varrho_2+M\frac{\partial\varrho_2}{\partial v}+N\frac{\partial\varrho_2}{\partial u}\Big) \\ \qquad\qquad -(F-M\varrho_2)\Big(Q\varrho_2+L\frac{\partial\varrho_2}{\partial v}+M\frac{\partial\varrho_2}{\partial u}\Big)\Big] \\ N_2 = \frac{-1}{T(E-L\varrho_2)}\sqrt{\frac{E-L\varrho_2}{1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}}\Big[(E-L\varrho_2)\Big(S\varrho_2+2N\frac{\partial\varrho_2}{\partial v}\Big) \\ \qquad\qquad -(F-M\varrho_2)\Big(R\varrho_2+2M\frac{\partial\varrho_2}{\partial v}\Big)\Big]. \end{cases}$$

§ 83.

Aus den, in den letzten Paragraphen gegebenen Werten der Fundamentalgrössen E_1, L_1 etc. würden sich die Bestimmungsgleichung der Hauptkrümmungsradien, sowie die Differentialgleichungen der Krümmungs- und Asymptotenlinien für jede Schale der Evolute ableiten lassen. Diese Rechnung, bei welcher sich namentlich für das Krümmungsmass der Evolute ein eleganter Ausdruck herausstellt, soll

hier nicht allgemein durchgeführt werden. Für die meisten Untersuchungen reicht es aus, die Variablen u, v so zu wählen, dass sie den Krümmungslinien auf der Urfläche entsprechen. Da im Nächstfolgenden alle Rechnungen sich auf diese Annahme beziehen, so ist es unnötig, die unterscheidenden Bezeichnungen p, q, E^*, G^* etc. (§ 78) einzuführen. Nun ist

$$F = 0, \quad M = 0, \quad E - L\varrho_1 = 0, \quad G - N\varrho_2 = 0,$$
$$G - N\varrho_1 = G\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right),$$

und die, für die Evolute aufgestellten Formeln erfahren beträchtliche Vereinfachungen. Denn es wird:

$$(1) \qquad \begin{cases} E_1 = \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}, \\ G_1 = G\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2, \end{cases}$$

$$(2) \qquad T_1^2 = G\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2,$$

$$(3) \qquad X_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad Y_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Für die Fundamentalgrössen 2. Ordnung ergibt sich zunächst:

$$L_1 = -\frac{1}{\sqrt{E}}\left(P\varrho_1 + 2L\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right),$$
$$M_1 = -\frac{1}{\sqrt{E}}\left(Q\varrho_1 + L\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right), \quad N_1 = -\frac{1}{\sqrt{E}}R\varrho_1.$$

Setzt man hierin $L = \frac{E}{\varrho_1}$ und führt für P, Q, R die Werte § 44 (16) ein, oder ersetzt umgekehrt die Ableitungen der Hauptkrümmungsradien durch die Fundamentalgrössen 3. Ordnung, so folgt:

$$(4) \qquad \begin{cases} L_1 = -\frac{\sqrt{E}}{\varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} = \frac{P}{\sqrt{E}}\varrho_1, \quad M_1 = 0, \\ N_1 = \frac{G}{\sqrt{E}}\frac{\varrho_1}{\varrho_2^2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial u} = -\frac{R}{\sqrt{E}}\varrho_1. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung besagt, dass die beiden Curvenschaaren auf der Evolute, welche den Krümmungslinien der Urfläche entsprechen, zu einander conjugirt sind.

Aus (1), (2) und (4) ergibt sich, da

$$H_1 = \frac{G_1 L_1 - 2F_1 M_1 + E_1 N_1}{E_1 G_1 - F_1^2}, \quad K_1 = \frac{L_1 N_1 - M_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2}$$

zu setzen ist:

$$(5)\qquad \begin{cases} H_1 = \dfrac{G\varrho_1^2 \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial u}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial u} - E\varrho_2^2\left(\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2 - EG(\varrho_1-\varrho_2)^2}{G\sqrt{E}\,\varrho_1(\varrho_1-\varrho_2)^2\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial u}} \\ K_1 = \dfrac{-\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{(\varrho_1-\varrho_2)^2\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial u}}, \end{cases}$$

oder

$$(6)\qquad \begin{cases} H_1 = \dfrac{E^2G(\varrho_1-\varrho_2)^2 - \varrho_1^4\varrho_2^2(PR-Q^2)}{G\sqrt{E}\,P\varrho_1^3(\varrho_1-\varrho_2)^2} \\ K_1 = -\dfrac{ER\varrho_2^2}{GP\varrho_1^2(\varrho_1-\varrho_2)^2}. \end{cases}$$

Für die zweite Schale hat man u mit v, ϱ_1 mit ϱ_2 zu vertauschen. Dies liefert:

$$(1a)\qquad \begin{cases} E_2 = E\left(1-\dfrac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial u}\right)^2, \\ F_2 = \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial u}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial v}, \qquad G_2 = \left(\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

$$(2a)\qquad T_2^2 = E\left(1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^2\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial v}\right)^2$$

$$(3a)\qquad X_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad Z_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$(4a)\qquad \begin{cases} L_2 = \dfrac{E}{\sqrt{G}}\dfrac{\varrho_2}{\varrho_1^2}\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial v} = -\dfrac{Q}{\sqrt{G}}\varrho_2, \qquad M_2 = 0, \\ N_2 = -\dfrac{\sqrt{G}}{\varrho_2}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial v} = \dfrac{S}{\sqrt{G}}\varrho_2 \end{cases}$$

$$(5a)\qquad \begin{cases} H_2 = \dfrac{E\varrho_2^2\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial v}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial v} - G\varrho_1^2\left(\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial u}\right)^2 - EG(\varrho_1-\varrho_2)^2}{E\sqrt{G}\,\varrho_2(\varrho_1-\varrho_2)^2\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial v}} \\ K_2 = \dfrac{-\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial v}}{(\varrho_1-\varrho_2)^2\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial v}} \end{cases}$$

$$(6a)\qquad \begin{cases} H_2 = \dfrac{EG^2(\varrho_1-\varrho_2)^2 - \varrho_1^2\varrho_2^4(QS-R^2)}{E\sqrt{G}\,S\varrho_2^3(\varrho_1-\varrho_2)^2} \\ K_2 = -\dfrac{GQ\varrho_1^2}{ES\varrho_2^2(\varrho_1-\varrho_2)^2}. \end{cases}$$

Die Werte (5, 6, 5a, 6a) für die Summe und das Product der Hauptkrümmungen einer Evolutenschale würden aufhören zu gelten, wenn einer der Nenner gleich Null wäre. Da E, G, ϱ_1, ϱ_2 und $\varrho_1 - \varrho_2$

den Grundannahmen nach von Null verschieden sind, so könnte dies nur für

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \varrho_2}{\partial v} = 0,$$

d. h. für

$$\varrho_1 = \varphi(v), \qquad \varrho_2 = \psi(u)$$

eintreten. Diese Gleichungen besagen, dass längs jeder Krümmungslinie einer der beiden Schaaren der zugehörige Hauptkrümmungsradius einen constanten Wert hat. Da T_1 resp. T_2 gleich Null wird, so degenerirt für eine solche Fläche die eine Schale der Evolute in eine Curve. Monge hat bewiesen, dass derartige Flächen als Enveloppen einer Kugel von variablem Radius dargestellt werden können, deren Mittelpunkt eine beliebige Raumcurve beschreibt. Sie werden als allgemeine Canalflächen bezeichnet. — Zu ihnen gehören die Rotationsflächen; der geometrische Ort der Kugelmittelpunkte wird für sie durch eine gerade Linie, nämlich die Rotationsaxe gebildet.

Das Krümmungsmass einer Evolutenschale wird gleich Null, wenn entweder einer der Hauptkrümmungshalbmesser der Urfläche unendlich gross wird, was hier stets ausgeschlossen ist, oder eine der Gleichungen

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = 0,$$

d. h.

$$\varrho_2 = \varphi(v), \qquad \varrho_1 = \psi(u)$$

stattfindet. Auch solche Flächen sind von Monge genauer untersucht worden. Hier kann auf sie ebenso wenig eingegangen werden wie auf die Canalflächen.

Auf die Monge'schen Flächen führt auch die Forderung, dass die Krümmungslinien der Evolute den Krümmungscurven der Evolvente entsprechen sollen. Denn nimmt man zu der Gleichung $M_1 = 0$ noch die Gleichung $F_1 = 0$ hinzu, so ist diese, wenn man es überhaupt mit einer Evolutenfläche zu thun haben will, nur durch $\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = 0$ zu erfüllen. Das Krümmungsmass der zweiten Schale wird alsdann gleich Null.

Es sei noch die gegebene Fläche eine Weingarten'sche (§ 71), d. h. es finde zwischen H und K oder zwischen ϱ_1 und ϱ_2 eine Relation

$$f(\varrho_1, \varrho_2) = 0$$

statt. Eliminirt man f durch Differentiation, so erhält man die, für die ganze Flächenclasse giltige Bedingung

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_2}{\partial v} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = 0. \tag{7}$$

Sie stellt sich, wenn für ϱ_1 und ϱ_2 die allgemeinen Ausdrücke eingesetzt werden, als partielle Differentialgleichung 3. Ordnung dar. Ihre geometrische Bedeutung lässt sich bei der hier getroffenen besonderen Wahl der krummlinigen Coordinaten sofort angeben. Es folgt nämlich

$$K_1 K_2 = \frac{1}{(\varrho_1 - \varrho_2)^4} \tag{8}$$

oder, wenn die Hauptkrümmungsradien für die erste Schale mit ϱ_1', ϱ_1'', für die zweite mit ϱ_2', ϱ_2'' bezeichnet werden,

$$\varrho_1' \varrho_1'' \varrho_2' \varrho_2'' = (\varrho_1 - \varrho_2)^4, \tag{9}$$

ein von Halphen gefundener Satz.

§ 84.

Bildet man aus (1) des vorigen Paragraphen das Quadrat des Linienelements der ersten Krümmungsmittelpunktsfläche, so ergibt sich

$$ds_1^2 = \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} du dv + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2 dv^2 + G \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 dv^2$$

oder, wenn man jetzt das Zeichen v durch q ersetzt,

$$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + G \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 dq^2. \tag{1}$$

Dieser Ausdruck führt darauf, die Grössen q und ϱ_1, d. h. den Parameter einer Schaar von Krümmungslinien und den Wert des zugehörigen Hauptkrümmungsradius, als Coordinaten anzunehmen. Eine solche Einführung ist, den beiden Schaaren von Krümmungscurven entsprechend, im Allgemeinen auf zwei Arten möglich. Ausser den hier immer ausgeschlossenen Flächen (Kugel und Flächen vom Krümmungsmass Null) sind jedoch die Canalflächen, für welche $\varrho_1 = \varphi(q)$ ist, besonders zu berücksichtigen. Ihre Cartesischen Coordinaten können nur auf eine Weise in der angegebenen Form dargestellt werden. — Während die Krümmungslinien der Evolvente zweckmässig dann als Coordinatenlinien betrachtet werden, wenn man es mit beiden Evolutenschalen gleichzeitig zu thun hat, so empfiehlt sich die Wahl von q und ϱ_1 (oder p und ϱ_2) hauptsächlich in dem Falle, dass nur eine Schale zur Untersuchung vorliegt. Wir bezeichnen die Fundamentalgrössen für die neue Annahme durch $\bar{E}$, $\bar{L}$ etc.

Soll die Differentialgleichung der Krümmungslinien durch $dq = 0$ erfüllt werden, so muss

$$\bar{\vartheta} = 0 \quad \text{oder} \quad \bar{F}\bar{L} - \bar{E}\bar{M} = 0 \tag{2}$$

sein. Der zu $q = \text{const.}$ gehörige Hauptkrümmungsradius hat den Wert

(3) $$\varrho_1 = \frac{\overline{E}}{\overline{L}} = \frac{\overline{F}}{\overline{M}},$$

wo der zweite Ansatz nicht gilt, wenn $\overline{F}$ und damit (wegen (2)) auch $\overline{M}$ gleich Null ist. Dieser Umstand, welcher besagt, dass die Linien $\varrho_1 = \text{const.}$ mit der zweiten Schaar von Krümmungslinien zusammenfallen, tritt nur für die Monge'schen Flächen ein. — Wie immer, wenn die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung durch eine Relation verbunden sind, können die Grössen zweiter Ordnung durch die der ersten Ordnung und die Hauptkrümmungsradien dargestellt werden. Denn es wird

(4) $$\overline{L} = \frac{\overline{E}}{\varrho_1}, \qquad \overline{M} = \frac{\overline{F}}{\varrho_1},$$

und für $\overline{\vartheta}'$ ergibt sich der Ausdruck

(5) $$\overline{\vartheta}' = -\frac{\overline{T}^2}{\varrho_2},$$

woraus mit Hilfe von (4):

(6) $$\overline{N} = \frac{\overline{G}}{\varrho_2} + \frac{\overline{F}^2}{\overline{E}}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right) = \frac{1}{\overline{E}}\left(\frac{\overline{F}^2}{\varrho_1} + \frac{\overline{T}^2}{\varrho_2}\right).$$

Weiter folgt:

(7) $$\bar{\eta} = -\frac{\overline{T}^2}{\varrho_1}, \quad \bar{\eta}' = -\frac{\overline{T}^2 \overline{F}}{\overline{E}}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

$$G - \overline{N}\varrho_1 = \frac{\overline{T}^2}{\overline{E}}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right).$$

Soll jetzt ϱ_1 mit der zweiten unabhängigen Variablen u zusammenfallen, so muss

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = 0$$

sein. Die Ausführung der Differentiation und die Combination der entstehenden Gleichungen liefert die Formeln

(8) $$\overline{E}\overline{P} + L^2 = 0, \quad \bar{\eta}'\overline{J}_2 + \overline{M}^2 = 0, \quad \overline{Q} = 0, \quad \overline{F}\overline{R} + \bar{\eta}'\overline{J}_2' = 0,$$

deren zweite nichts Anderes ist als die eine der Fundamentalgleichungen. Sie kann durch Einführung der Hauptkrümmungsradien in die Form

(9) $$\frac{\overline{F}}{\varrho_1^2} - \frac{\overline{T}^2}{\overline{E}}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\overline{J}_2 = 0$$

transformirt werden.

Für die Fundamentalgrössen der Evolute ergeben sich nun aus § 81 und 82 die Ausdrücke

$$(10)\quad \bar{E}_1 = 1,\quad \bar{F}_1 = 0,\quad \bar{G}_1 = (\bar{G} - \bar{N}\varrho_1)\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) = \frac{\bar{T}^2}{\bar{E}}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2,$$

$$(11)\quad \begin{cases} \bar{L}_1 = -\dfrac{\bar{L}}{\sqrt{\bar{E}}} = -\dfrac{\sqrt{\bar{E}}}{\varrho_1}, \quad \bar{M}_1 = -\dfrac{\bar{M}}{\sqrt{\bar{E}}} = -\dfrac{\bar{F}}{\varrho_1\sqrt{\bar{E}}} \\ \bar{N}_1 = -\dfrac{\bar{R}\varrho_1}{\sqrt{\bar{E}}} = \dfrac{\bar{n}'\varrho_1\bar{J}_2'}{\bar{F}\sqrt{\bar{E}}}. \end{cases}$$

Die beiden ersten Gleichungen (10) kennzeichnen das System der Coordinaten ϱ_1, q als orthogonal-geodätisch (§ 58); und zwar bilden die Curven $q = \text{const.}$, welche den Krümmungslinien der Evolvente entsprechen, die Schaar von geodätischen Linien.

Der Umstand, dass vermöge der Formeln (11) die Grössen $\bar{L}_1$ und $\bar{M}_1$ sich von den entsprechenden Fundamentalgrössen der Urfläche nur um den Factor $\frac{-1}{\sqrt{\bar{E}}}$ unterscheiden, gibt zu mehreren Folgerungen Veranlassung, und gestattet namentlich eine wichtige Vereinfachung der zweiten Fundamentalgleichung für die Evolute. Benutzt man nämlich die Resultate § 58 (6), so ergibt sich für diese die Form

$$(12)\quad \frac{\partial \bar{L}_1}{\partial q} - \frac{\partial \bar{M}_1}{\partial \varrho_1} - \frac{\bar{M}_1}{2\bar{G}_1}\frac{\partial \bar{G}_1}{\partial \varrho_1} = 0.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \bar{L}_1}{\partial q} - \frac{\partial \bar{M}_1}{\partial \varrho_1} = -\frac{1}{\sqrt{\bar{E}}}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial q} - \frac{\partial \bar{M}}{\partial \varrho_1}\right) + \frac{L}{E\sqrt{\bar{E}}}(\bar{E}\bar{J}_1' + \bar{F}\bar{J}_2') - \frac{\bar{M}}{\bar{E}\sqrt{\bar{E}}}(\bar{E}\bar{J}_1 + \bar{F}\bar{J}_2).$$

Ersetzt man hierin $\frac{\partial \bar{L}}{\partial q} - \frac{\partial \bar{M}}{\partial \varrho_1}$ durch den aus § 28 (21) folgenden Ausdruck, nimmt ferner für $\bar{L}$ und $\bar{M}$ die Werte (4) und substituirt Alles in (12), so folgt

$$\frac{T^2 J_2}{\varrho_2 \bar{E}\sqrt{\bar{E}}} + \frac{\bar{F}}{2\varrho_1 \bar{G}_1\sqrt{\bar{E}}}\frac{\partial \bar{G}_1}{\partial \varrho_1} = 0,$$

und bei nochmaliger Benutzung der Fundamentalgleichung (in der Form (9)), wobei die Gleichung durch $\frac{\bar{F}}{\varrho_1\sqrt{\bar{E}}}$ teilbar wird,

$$(13)\quad \frac{\partial \log \bar{G}_1}{\partial \varrho_1} = \frac{2}{\varrho_1 - \varrho_2}.$$

Dies ist die gesuchte Formel. Sie liefert sofort den Ausdruck von $\bar{G}_1$ durch eine Quadratur, wenn die Urfläche als eine Weingarten'sche angenommen wird. Denn ist ϱ_2 als eindeutige und eindeutig umkehrbare Function von ϱ_1 gegeben,

(14) $$\varrho_2 = \lambda(\varrho_1),$$

so folgt

(15) $$G_1 = \psi(q)\, e^{2\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_1 - \lambda(\varrho_1)}},$$

wo ψ eine willkürliche Function bedeutet, in welche wir uns auch die, bei Ausführung des Integrals auftretende willkürliche Constante aufgenommen denken. Das Linienelement der Evolute wird dann durch die Gleichung

$$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \psi(q)\, e^{2\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_1 - \lambda(\varrho_1)}}\, dq^2$$

oder, wenn man

(16) $$\psi(q)dq^2 = dq'^2, \qquad e^{2\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_1 - \lambda(\varrho_1)}} = \varphi(\varrho_1)$$

setzt und für q' wieder q schreibt, durch

(17) $$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \varphi(\varrho_1)dq^2$$

gegeben. Die Function $\varphi(\varrho_1)$ hängt nur von λ ab, und es bleibt hiernach auch der Ausdruck von ds_1 für alle Flächen der durch die Gleichung (14) bestimmten Klasse derselbe. Denkt man sich mithin irgend zwei Flächen einer solchen Klasse auf die Variablen q und ϱ_1 bezogen, so stimmen für die Krümmungsmittelpunktsflächen beider die Fundamentalgrössen erster Ordnung überein. Dies liefert den, von Weingarten gefundenen Satz:

Die Evoluten aller Flächen, bei denen auf gleiche Weise in jedem Punkte der eine Hauptkrümmungsradius allein durch den anderen bestimmt ist, sind auf einander abwickelbar.

Der Satz wird noch ergänzt durch die Theorie der Rotationsflächen, deren Linienelement nach § 19 (7) ebenfalls durch eine Gleichung von der Form (17) dargestellt werden kann. Es ist also jede Krümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche $\varrho_2 = \lambda(\varrho_1)$ auf eine bestimmte Rotationsfläche abwickelbar, und zwar gehen bei der Abwickelung die geodätischen Linien $q = \text{const.}$, welche den Krümmungslinien der Evolvente entsprechen, in die Meridiane der Rotationsfläche über, die Curven $\varrho_1 = \text{const.}$, welche den Linien constanten Halbkrümmungshalbmessers correspondiren, in die Parallelkreise. Um die Meridiancurve der Rotationsfläche zu finden, d. h. die Gleichung der letzteren in die Form

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

zu setzen, hat man die Beziehungen zwischen f und φ, φ und λ

zu beachten. Nun müssen nach § 19 für $u' = \varrho_1$ die beiden Gleichungen

$$\int \sqrt{1 + f'(u)^2}\, du = \varrho_1 \tag{18}$$

$$u^2 = \varphi(\varrho_1) \tag{19}$$

übereinstimmen. Hat man also für gegebenes λ die Function φ aus (16) ermittelt, so ist ϱ_1 aus (18) und (19) zu eliminiren. Alsdann ergibt sich zur Bestimmung von f eine Differentialgleichung erster Ordnung.

§ 85.

Man kann zum Beweise des Weingarten'schen Satzes auch direct von der Gleichung § 84 (1) ausgehen, ohne eine weitere Veränderung der Coordinaten vorzunehmen. Denn nach § 44 (18) ist, wenn u, v die Parameter der Krümmungslinien bezeichnen,

$$\frac{\partial \log G}{\partial u} = \frac{2\varrho_1}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)} \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}. \tag{1}$$

Wenn nun ϱ_1 und ϱ_2 in functionaler Beziehung stehen, so liefert diese Gleichung:

$$G = \psi(v)\, e^{2\int \frac{\varrho_1 d\varrho_2}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)}}, \tag{2}$$

und das Quadrat des Linienelements kann auf die Form

$$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 e^{2\int \frac{\varrho_1 d\varrho_2}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)}} dv'^2 \tag{3}$$

gebracht werden, welche wieder für jede Fläche der Klasse $\varrho_2 = \lambda(\varrho_1)$ Giltigkeit besitzt. Dass diese Gleichung mit der im vorigen Paragraphen abgeleiteten, d. h. mit

$$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + e^{2\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}} dq^2 \tag{4}$$

übereinkommt, wird leicht verificirt.

Nimmt man noch die erste Gleichung § 44 (18) hinzu, in der Form

$$\frac{\partial \log E}{\partial v} = \frac{2\varrho_2}{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1)} \frac{\partial \varrho_1}{\partial v}, \tag{5}$$

so ergibt sich

$$E = \chi(u)\, e^{2\int \frac{\varrho_2 d\varrho_1}{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1)}}. \tag{6}$$

Bei passender Wahl der Grössen u und v, welche die beiden Schaaren von Krümmungslinien bestimmen, kann hiernach das Linienelement einer Weingarten'schen Fläche durch die Gleichung

$$ds^2 = e^{2\int \frac{\varrho_2 d\varrho_1}{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1)}} du^2 + e^{2\int \frac{\varrho_1 d\varrho_2}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)}} dv^2 \tag{7}$$

gegeben werden. Da ferner $L = \frac{E}{\varrho_1}$, $N = \frac{G}{\varrho_2}$ ist, so lassen sich alle von Null verschiedenen Fundamentalgrössen einer solchen Fläche als Functionen von ϱ_1 darstellen.

Bemerkenswert ist noch der Ausdruck des Krümmungsmasses der Evolute, welches nach § 58 (7) durch die Gleichung

$$K_1 = -\frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial^2 \sqrt{G_1}}{\partial \varrho_1^2}$$

geliefert wird. Setzt man nach (4):

$$\sqrt{G_1} = e^{\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}}, \tag{8}$$

so ergibt sich

$$K_1 = \frac{-1}{(\varrho_1 - \varrho_2)^2} \frac{d\varrho_2}{d\varrho_1}. \tag{9}$$

Derselbe Wert folgt unmittelbar aus § 83 (5), während nach (5a) desselben Paragraphen

$$K_2 = \frac{-1}{(\varrho_1 - \varrho_2)^2} \frac{d\varrho_1}{d\varrho_2} \tag{10}$$

ist. —

Wir kehren zu den Ausdrücken § 84 (11) zurück. Aus ihnen folgt:

$$\bar{L}_1 d\varrho_1^2 + 2\bar{M}_1 d\varrho_1 dq + \bar{N}_1 dq^2 = \frac{-1}{\sqrt{E}} (\bar{L} d\varrho_1^2 + 2\bar{M} d\varrho_1 dq + \bar{R}\varrho_1 dq^2).$$

Die linke Seite würde, gleich Null gesetzt, die Asymptotencurven der Evolute liefern. Sollen diese den Asymptotenlinien der Evolvente entsprechen, so muss die entstehende Gleichung mit

$$\bar{L} d\varrho_1^2 + 2\bar{M} d\varrho_1 dq + \bar{N} dq^2 = 0$$

übereinstimmen, d. h. $\bar{R}\varrho_1 = \bar{N}$ oder

$$\bar{N}_1 = -\frac{\bar{N}}{\sqrt{E}} \tag{11}$$

sein. Diese Relation kann durch Einführung der Krümmungsmasse in eine übersichtlichere Form gesetzt werden. Es ist nämlich

$$K = \frac{\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2}{\bar{T}^2}, \qquad K_1 = \frac{\bar{L}_1 \bar{N}_1 - \bar{M}_1^2}{\bar{G}_1} = \frac{-\bar{L}\bar{N}_1 \sqrt{E} - \bar{M}^2}{T^2 \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2},$$

also die Gleichung (11) gleichbedeutend mit

$$K_1 = \frac{K}{\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1 (\varrho_1 - \varrho_2)^2}. \tag{12}$$

Diese geometrische Bedingung kennzeichnet eine bestimmte Klasse von

Flächen, welche bei Einführung Cartesischer Coordinaten durch eine partielle Differentialgleichung 3. Ordnung definirt werden würde. Transformirt man (12) auf die Parameter der Krümmungslinien, so erhält man

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial u} + \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \log(\varrho_1 \varrho_2)}{\partial u} = 0,$$

aus welcher Gleichung durch einmalige Integration

$$K = \psi(v) \tag{13}$$

folgt. Es ergibt sich also folgendes Resultat: Sollen die Asymptotencurven auf einer Evolute den Asymptotencurven der Evolvente entsprechen, so muss das Krümmungsmass der letzteren längs jeder Krümmungslinie der zugehörigen Schaar einen constanten Wert haben.

Zur Entscheidung der Frage, wann die Asymptotenlinien beider Evoluten einander, jedoch vorläufig nicht den Asymptotencurven der Evolvente entsprechen, führt man zweckmässig von vornherein die Parameter der Krümmungslinien ein. Die in Rede stehenden Curven werden dann nach § 83 (4, 4a) durch die Gleichungen

$$-\frac{\sqrt{E}}{\varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\,du^2 + \frac{G}{\sqrt{E}}\frac{\varrho_1}{\varrho_2^2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial u}\,dv^2 = 0$$

$$\frac{E}{\sqrt{G}}\frac{\varrho_2}{\varrho_1^2}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\,du^2 - \frac{\sqrt{G}}{\varrho_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial v}\,dv^2 = 0$$

bestimmt. Für die Aequivalenz dieser Gleichungen ist die Proportionalität entsprechender Coefficienten, d. h. die Bedingung

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_2}{\partial v} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = 0$$

notwendig und hinreichend; sie kennzeichnet die gesuchte Flächenklasse als die Weingarten'sche.

Wird endlich vorgeschrieben, dass die Asymptotenlinien auf der gegebenen Fläche und auf beiden Evoluten einander entsprechen sollen, so kann dieser Forderung nur durch die Flächen constanten Krümmungsmasses genügt werden. Denn da die betrachtete Fläche zunächst eine Weingarten'sche sein muss, so gilt für K_1 der Ausdruck (9), welcher mit (12) combinirt die Gleichung

$$\frac{d\varrho_2}{d\varrho_1} + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = 0, \qquad \varrho_1 \varrho_2 = C$$

liefert. Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man beachtet, dass K eine Function sowohl von v allein als von u allein sein muss. Denn dies ist auf Grund der Unabhängigkeit von u und v nur möglich, wenn beide Functionen sich auf eine und dieselbe Constante reduciren.

Der Wert der letzteren ist (der Realität der Asymptotencurven wegen) als negativ anzunehmen.

§ 86.

Führt man die krummlinigen Coordinaten, welche im § 84 verwandt wurden, auch in die Formeln § 81 (10) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} = X, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \varrho_1} = Y, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \varrho_1} = Z, \tag{1}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial q} = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{F}{E}\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\right), \ldots, \tag{2}$$

und die Gleichungen (1) liefern, in Verbindung mit § 81 (1):

$$\begin{cases} x = x_1 - \varrho_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} \\ y = y_1 - \varrho_1 \dfrac{\partial y_1}{\partial \varrho_1} \\ z = z_1 - \varrho_1 \dfrac{\partial z_1}{\partial \varrho_1}. \end{cases} \tag{3}$$

Bezeichnen also jetzt $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten einer gegebenen Fläche f, xyz die einer zweiten Fläche φ, für welche die gegebene eine Schale der Evolute ist, so lassen sich xyz vermöge (3) durch $x_1 y_1 z_1$ ausdrücken, unter der Voraussetzung, dass diese Coordinaten als Functionen der vorher gebrauchten Variablen ϱ_1, q bekannt sind. Man kann aber auch umgekehrt beweisen, dass zu irgend einem System krummliniger Coordinaten, für welche das Quadrat des Linienelements von f die Form

$$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \bar{G}_1 dq^2 \tag{4}$$

annimmt, im Allgemeinen eine Evolvente von f gehört, welche durch die Gleichungen (3) definirt wird.

Es seien nämlich nach Auffindung eines solchen Coordinatensystems, welches

$$\bar{E}_1 = 1, \qquad \bar{F}_1 = 0 \tag{5}$$

ergibt, jene Gleichungen zur Definition einer Fläche φ angenommen, ausserdem zur Abkürzung

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} = X, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \varrho_1} = Y, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \varrho_1} = Z$$

gesetzt. Dann lässt sich zeigen, dass $X\,Y\,Z$ die Richtungscosinus der Normale der Fläche φ sind. Denn zunächst liefern die letzten Formeln

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \varrho_1}\right)^2 = \bar{E}_1 = 1, \tag{6}$$

woraus:

$$X\frac{\partial X}{\partial \varrho_1} + Y\frac{\partial Y}{\partial \varrho_1} + Z\frac{\partial Z}{\partial \varrho_1} = 0$$
$$X\frac{\partial X}{\partial q} + Y\frac{\partial Y}{\partial q} + Z\frac{\partial Z}{\partial q} = 0.$$

Differentiirt man ferner die Gleichungen (3), so ergibt sich

(7) $$\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} = -\varrho_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1^2} = -\varrho_1 \frac{\partial X}{\partial \varrho_1}, \ldots$$

(8) $$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial x_1}{\partial q} - \varrho_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1 \partial q} = \frac{\partial x_1}{\partial q} - \varrho_1 \frac{\partial X}{\partial q}, \ldots,$$

und wenn die aus diesen Gleichungen folgenden Werte von $\frac{\partial X}{\partial \varrho_1}$, $\frac{\partial X}{\partial q}$ etc. in die vorhergehenden Relationen substituirt werden:

(9) $$X\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + Y\frac{\partial y}{\partial \varrho_1} + Z\frac{\partial z}{\partial \varrho_1} = 0,$$
$$X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q} - \left(X\frac{\partial x_1}{\partial q} + Y\frac{\partial y_1}{\partial q} + Z\frac{\partial z_1}{\partial q}\right) = 0.$$

Die letzte Gleichung reducirt sich wegen

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial x_1}{\partial q} + \frac{\partial y_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial y_1}{\partial q} + \frac{\partial z_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial z_1}{\partial q} = \overline{F}_1 = 0$$

auf

(10) $$X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q} = 0.$$

Die Gleichungen (6), (9), (10) kennzeichnen nun in der That XYZ als Richtungscosinus der Normale der durch (3) dargestellten Fläche. Und aus (3) folgen alsdann die Formeln

$$x_1 = x + \varrho_1 X, \quad y_1 = y + \varrho_1 Y, \quad z_1 = z + \varrho_1 Z,$$

welche lehren, dass die Fläche f die zum Hauptkrümmungsradius ϱ_1 gehörige Evolute der Fläche φ, oder dass diese eine Evolvente von f ist.

Bei der ganzen Untersuchung ist der Fall ausgeschlossen, dass der Ansatz (3) keine Fläche, sondern nur eine Curve repräsentirt. Dann sind xyz Functionen einer Variablen t, welche ihrerseits Function von ϱ_1 und q oder von einer dieser Veränderlichen ist, und man hat

(11) $$\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial t}{\partial \varrho_1}, \qquad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial t}{\partial q}.$$

Um über die Natur von f in diesem Fall etwas aussagen zu können, differentiiren wir die Gleichungen (5), sowie den Ausdruck von $\overline{G}_1$, und zwar so, dass die Ableitungen $\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1^2}, \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1 \partial q}, \ldots$ auftreten. Diese ersetzen wir darauf durch ihre aus (7) und (8) folgenden Ausdrücke

und nehmen die Gleichungen (11) hinzu. Von den alsdann entstehenden Relationen brauchen wir folgende:

$$(12)\qquad \frac{\partial t}{\partial \varrho_1}\sum \frac{\partial x_1}{\partial q}\frac{dx}{dt}=0, \qquad \frac{\partial t}{\partial v}\sum \frac{\partial x_1}{\partial q}\frac{dx}{dt}=\overline{G}_1-\frac{1}{2}\varrho_1\frac{\partial \overline{G}_1}{\partial \varrho_1}.$$

Um der ersten zu genügen, kann man $\frac{\partial t}{\partial \varrho_1}=0$ machen, d. h. t, und damit auch xyz, als Functionen von q allein voraussetzen. Dann ergibt sich aus (7):

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1^{\,2}}=0, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial \varrho_1^{\,2}}=0, \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial \varrho_1^{\,2}}=0$$

oder

$$(13)\qquad x_1=\varrho_1 U+U_1, \quad y_1=\varrho_1 V+V_1, \quad z_1=\varrho_1 W+W_1,$$

wenn $U,\ldots W_1$ Functionen von q bezeichnen. Gibt man in diesen Gleichungen q einen constanten Wert, so stellen sie eine gerade Linie dar. Die durch Elimination von ϱ_1 und q entstehende Fläche wird mithin durch Bewegung einer Geraden erzeugt, welche stets die Curve

$$(14)\qquad x_1=U_1, \qquad y_1=V_1, \qquad z_1=W_1$$

schneidet. Um $\overline{E}_1=1$ zu machen, hat man zwischen U, V und W die Relation $U^2+V^2+W^2=1$ hinzuzunehmen. Alsdann bedeuten diese Functionen die Richtungscosinus der erzeugenden Geraden, ϱ_1 den Abstand irgend eines Punktes auf ihr von ihrem Schnittpunkte mit der Leitlinie (14), welche auch durch die Gleichungen (3) dargestellt werden würde. Was die Grösse $\overline{G}_1$ betrifft, so nimmt diese vermöge (13) die Form an:

$$(15)\qquad \overline{G}_1=\alpha\varrho_1^{\,2}+2\beta\varrho_1+\gamma,$$

wo auch α, β, γ Functionen von q bedeuten.

Um die erste Gleichung (12) zu befriedigen, kann man zweitens

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial q}\frac{dx}{dt}=0, \quad \text{also} \quad \overline{G}_1-\frac{1}{2}\varrho_1\frac{\partial \overline{G}_1}{\partial \varrho_1}=0,$$

mithin, bei passender Darstellung der Curven $q=\text{const.}$,

$$(16)\qquad \overline{G}_1=\varrho_1^{\,2}$$

setzen; ein Wert, der in (15) enthalten ist. Das Linienelement

$$(17)\qquad ds_1=\sqrt{d\varrho_1^{\,2}+\varrho_1^{\,2}dq^2}$$

kann aber, wie aus § 58 (7) sofort folgt, nur Flächen vom Krümmungsmass Null zukommen, welche, als Krümmungsmittelpunktsflächen vorausgesetzt, auf die Monge'schen Flächen führen würden.

Lässt man diese Flächen bei Seite, so kann man das gefundene Resultat folgendermassen aussprechen:

Um eine Fläche zu finden, für welche eine gegebene (deren Krümmungsmass von Null verschieden ist) die eine Schale der Evolute bildet, hat man die Coordinaten der letzteren durch solche Variablen ϱ_1, q auszudrücken, bei deren Einführung das Quadrat des Linienelements die Form (4) annimmt. Alsdann stellen die Gleichungen (3) die gesuchte Fläche dar, mit alleiniger Ausnahme des Falles, dass die gegebene Fläche geradlinig ist und die Variable ϱ_1 die vorher angegebene geometrische Bedeutung hat. — Allgemein bezeichnet (nach § 58) die in (4) vorkommende Grösse q den Parameter einer Schaar geodätischer Linien, welche auf einer willkürlich angenommenen Curve senkrecht stehen, während ϱ_1 die Bogenlänge einer solchen Linie oder den normalen geodätischen Abstand eines Flächenpunktes von der angenommenen Curve darstellt. Ist die Fläche f in beliebigen Coordinaten u, v gegeben, für welche E_1, F_1, G_1 die Fundamentalgrössen erster Ordnung sind, so hat man (§ 59) nur die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$E_1\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2 - 2F_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} + G_1\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2 = E_1G_1 - F_1^2 \tag{18}$$

oder

$$\Delta^1(\varrho_1) = 1$$

zu integriren, um ϱ_1 und q als Functionen der ursprünglichen Coordinaten zu erhalten. Denn das Integral der, zur Bestimmung von q noch hinzutretenden Gleichung

$$E_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial v} - F_1\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}\right) + G_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial u} = 0$$

ergibt sich nach der a. a. O. durchgeführten Untersuchung aus dem von (18).

Soll noch die zweite Schale der Evolute gefunden werden, welche durch die Gleichungen

$$x_2 = x + \varrho_2 X, \qquad y_2 = y + \varrho_2 Y, \qquad z_2 = z + \varrho_2 Z$$

geliefert wird, so hat man den Wert von ϱ_2 zu ermitteln, was auf folgende Weise geschieht. Durch Vergleichung von (7) mit § 11 (10) folgt:

$$\bar{\vartheta} = 0, \qquad \frac{\bar{\eta}}{T^2} = -\frac{1}{\varrho_1}.$$

Die erste Formel lehrt, dass die Gleichung $q =$ const. die eine Schaar von Krümmungslinien auf der Fläche φ darstellt, und die zweite, mit Benutzung der ersten, dass ϱ_1 den zu dieser Schaar gehörigen Hauptkrümmungsradius von φ bedeutet. Wählt man ϱ_1 und q zu krummlinigen Coordinaten, so leitet die, im § 84 durchgeführte Rechnung wieder zu der Gleichung

$$\frac{\partial \log \bar{G}_1}{\partial \varrho_1} = \frac{2}{\varrho_1 - \varrho_2},$$

aus welcher

$$\varrho_2 = \varrho_1 - \frac{2\bar{G}_1}{\frac{\partial \bar{G}_1}{\partial \varrho_1}} \tag{19}$$

folgt. Die Grösse $\bar{G}_1$ ergibt sich dabei nach § 59 (4) aus der Formel

$$\Delta^1(q) = \frac{1}{\bar{G}_1}. \tag{20}$$

Zieht man noch die Ausdrücke (3) hinzu, so findet man den zweiten Mantel der Evolute durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{2\bar{G}_1}{\frac{\partial \bar{G}_1}{\partial \varrho_1}} \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} \\ y_2 &= y_1 - \frac{2\bar{G}_1}{\frac{\partial \bar{G}_1}{\partial \varrho_1}} \frac{\partial y_1}{\partial \varrho_1} \\ z_2 &= z_1 - \frac{2\bar{G}_1}{\frac{\partial \bar{G}_1}{\partial \varrho_1}} \frac{\partial z_1}{\partial \varrho_1}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

dargestellt.

§ 87.

Durch die Untersuchung des vorigen Paragraphen wird man in den Stand gesetzt, auch die Umkehrung des Weingarten'schen Satzes zu beweisen. Es sei nämlich g eine gegebene Rotationsfläche, deren Linienelement durch die Gleichung

$$ds^2 = d\varrho_1^2 + \varphi(\varrho_1) dq^2$$

bestimmt wird. Ist f irgend eine, auf g abwickelbare Fläche, so existirt auf f eine Schaar geodätischer Linien, welche den Meridiancurven von g entspricht. Denn die letzteren sind geodätische Linien auf g; und man erkennt unmittelbar aus der Differentialgleichung der geodätischen Linien überhaupt, dass sie bei der Abwickelung in Curven derselben Art übergehen müssen. Jene Linien nun und ihre orthogonalen Trajectorien wählen wir zu Coordinatenlinien. Dann ist, wenn x_1, y_1, z_1 die Cartesischen Coordinaten von f bedeuten:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \varrho_1}\right)^2 = 1 \\ &\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial x_1}{\partial q} + \frac{\partial y_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial y_1}{\partial q} + \frac{\partial z_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial z_1}{\partial q} = 0 \\ &\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial v}\right)^2 = \varphi(\varrho_1). \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Im Allgemeinen liefern alsdann die Formeln § 86 (3) eine Fläche φ, für welche f die eine Schale der Evolute ist, und aus der Gleichung § 86 (19) ergibt sich jetzt

$$\varrho_2 = \varrho_1 - \frac{2\varphi(\varrho_1)}{\varphi'(\varrho_1)} = \lambda(\varrho_1), \tag{2}$$

d. h. die Hauptkrümmungsradien von φ sind durch eine Relation verbunden. Mithin lässt sich im Allgemeinen irgend eine, auf eine gegebene Rotationsfläche abwickelbare Fläche, deren Krümmungsmass von Null verschieden ist, als Evolute einer Weingarten'schen Fläche auffassen. Nur der Fall, dass

$$\sqrt{d\varrho_1^2 + (\alpha\varrho_1^2 + 2\beta\varrho_1 + \gamma)dq^2}$$

das Linienelement der gegebenen Fläche darstellt, bedarf einer besonderen Erörterung. Zunächst ist zu bemerken, dass α, β, γ jetzt Constanten sein müssen, da $\overline{G_1}$ als Function von ϱ_1 allein vorausgesetzt wird. Setzt man ferner, da $\alpha > 0$,

$$\sqrt{\alpha}dq = dq', \quad \varrho_1 + \frac{\beta}{\alpha} = \varrho_1', \qquad \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \gamma'$$

und schreibt für q', ϱ_1', γ' wieder q, ϱ_1, γ, so wird

$$\overline{G_1} = \varrho_1^2 + \gamma = \varphi(\varrho_1), \tag{3}$$

und aus (2) und (3) ergibt sich

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = -\frac{1}{\gamma}. \tag{4}$$

Die durch das Linienelement

$$ds_1 = \sqrt{d\varrho_1^2 + (\varrho_1^2 + \gamma)dq^2} \tag{5}$$

bestimmten Flächen können demnach im Allgemeinen als Evoluten von Flächen constanten Krümmungsmasses betrachtet werden. Die Formeln § 86 (13) jedoch repräsentiren, wenn die in ihnen enthaltenen sechs Functionen fünf Bedingungen unterworfen werden, eine Classe geradliniger Flächen von demselben Linienelement, für welche die Ausdrücke § 86 (3) überhaupt keine Evolvente liefern. Nimmt man $\gamma > 0$ an, so erkennt man unter den in Rede stehenden Flächen einerseits die Rotationsfläche der Kettenlinie, andererseits die Schraubenfläche. Denn setzt man für die erstere Fläche nach § 19:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z+b}{a}} + e^{-\frac{z+b}{a}}\right) = u,$$

so ergibt sich zunächst

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 - a^2}du^2 + u^2dv^2,$$

und bei der Transformation

$$\sqrt{u^2 - a^2} = u':$$

$$ds^2 = du'^2 + (u'^2 + a^2)\, dv^2.$$

Und dasselbe Linienelement folgt (für $k = a$) auch aus den Gleichungen der Schraubenfläche [§ 47 (3)].

Wird die Klasse Weingarten'scher Flächen, deren Evoluten betrachtet werden, durch die Minimalflächen gebildet, für welche

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 0$$

ist, so folgt aus § 85 (4):

$$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \varrho_1 dq^2. \tag{6}$$

Da nun die Rotationsfläche der Kettenlinie eine Minimalfläche ist, so lässt sich eine der Flächen, deren Linienelement durch (6) geliefert wird, ohne Weiteres angeben: es ist diejenige, welche durch Rotation der Evolute der Kettenlinie entsteht. Die Klasse der Evoluten der Minimalflächen deckt sich also mit dem Inbegriff der, auf die Rotationsfläche der Kettenlinienevolute abwickelbaren Flächen.

§ 88.

Denkt man sich auf allen Normalen einer Fläche nach einer und derselben Richtung von den Flächenpunkten $A, B, \ldots$ aus gleiche Strecken R abgetragen, so ist der geometrische Ort der Endpunkte $A_0, B_0, \ldots$ dieser Strecken eine neue Fläche, welche als Parallelfläche der gegebenen im Abstande R bezeichnet wird. Wir setzen $R = +a$ oder $= -a$, je nachdem die Abtragung nach aussen oder nach innen vorgenommen wird; dann sind die Ausdrücke für die Coordinaten der Parallelfläche:

$$x_0 = x + aX, \qquad y_0 = y + aY, \qquad z_0 = z + aZ. \tag{1}$$

Aus ihnen folgt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u} + a\dfrac{\partial X}{\partial u}, \ldots \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v} + a\dfrac{\partial X}{\partial v}, \ldots \end{cases} \tag{2}$$

und die Fundamentalgrössen erster Ordnung werden:

$$\begin{cases} E_0 = E - 2aL + a^2\mathfrak{E} \\ F_0 = F - 2aM + a^2\mathfrak{F} \\ G_0 = G - 2aN + a^2\mathfrak{G}, \end{cases} \tag{3}$$

oder, mit Benutzung von § 25 (2):

$$(4)\qquad \begin{cases} E_0 = E\left(1 - \frac{a^2}{\varrho_1 \varrho_2}\right) + La\left[a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - 2\right] \\ F_0 = F\left(1 - \frac{a^2}{\varrho_1 \varrho_2}\right) + Ma\left[a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - 2\right] \\ G_0 = G\left(1 - \frac{a^2}{\varrho_1 \varrho_2}\right) + Na\left[a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - 2\right]. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich noch

$$(5)\qquad T_0^2 = (1 - Ha + Ka^2)^2\, T^2 = \left(1 - \frac{a}{\varrho_1}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{\varrho_2}\right)^2 T^2,$$

und das Quadrat des Linienelements erhält den Ausdruck

$$(6)\qquad \begin{aligned} ds_0^2 &= ds^2 - 2a\frac{ds^2}{\varrho} + a^2 d\sigma^2 \\ &= (1 - Ka^2)\, ds^2 + a\,(Ha - 2)\frac{ds^2}{\varrho} \\ &= \left[\left(\frac{a}{\varrho} - 1\right)^2 + a^2\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\right] ds^2. \end{aligned}$$

Weiter folgt aus (2), mit Hilfe von § 11 (10) und § 12 (12, 13):

$$(7)\qquad \frac{\partial y_0}{\partial u}\frac{\partial z_0}{\partial v} - \frac{\partial z_0}{\partial u}\frac{\partial y_0}{\partial v} = (1 - Ha + Ka^2)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right), \ldots$$

Die Festsetzungen des § 3, welche bewirken, dass die Richtung der Normale nirgends unbestimmt wird, sollen auch für die Parallelflächen beibehalten werden. Dann ist a so anzunehmen, dass bei der Construction der Parallelfläche niemals

$$1 - Ha + Ka^2 = 0$$

wird, d. h. dass der Abstand R nirgends dem numerischen Werte eines Hauptkrümmungshalbmessers der gegebenen Fläche gleich wird. Unter dieser Voraussetzung sind die Richtungscosinus der Normale für die Parallelfläche den entsprechenden Grössen für die ursprüngliche Fläche gleich oder entgegengesetzt gleich, und man kann bei passender Verfügung über die positive Richtung

$$(8)\qquad X_0 = X, \qquad Y_0 = Y, \qquad Z_0 = Z$$

annehmen.

Hieraus folgen leicht auch die Werte der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung, wenn man sie nach den Formeln § 11 (4, 5) berechnet. Es ist nämlich

$$\left\{ L_0 = L - a\mathfrak{E} \right.$$

$$(10)\qquad \begin{cases} L_0 = E\,\frac{a}{\varrho_1\varrho_2} + L\left[1 - a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\right] \\ M_0 = F\,\frac{a}{\varrho_1\varrho_2} + M\left[1 - a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\right] \\ N_0 = G\,\frac{a}{\varrho_1\varrho_2} + N\left[1 - a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\right]. \end{cases}$$

Aus (4) und (10) ergeben sich endlich die Ausdrücke, welche zur Berechnung der Hauptkrümmungsradien ϱ_1^0, ϱ_2^0 der Parallelfläche gebraucht werden:

$$(11)\qquad G_0L_0 - 2F_0M_0 + E_0N_0 = \left(1 - \frac{a}{\varrho_1}\right)\left(1 - \frac{a}{\varrho_2}\right)\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} - \frac{2a}{\varrho_1\varrho_2}\right)T^2$$

$$(12)\qquad L_0N_0 - M_0^2 = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\left(1 - \frac{a}{\varrho_1}\right)\left(1 - \frac{a}{\varrho_2}\right)T^2.$$

Hiernach wird

$$(13)\qquad \begin{cases} H_0 \equiv \frac{1}{\varrho_1^0} + \frac{1}{\varrho_2^0} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2 - 2a}{(\varrho_1 - a)(\varrho_2 - a)} = \frac{1}{\varrho_1 - a} + \frac{1}{\varrho_2 - a} \\ K_0 \equiv \frac{1}{\varrho_1^0\varrho_2^0} = \frac{1}{(\varrho_1 - a)(\varrho_2 - a)}, \end{cases}$$

woraus

$$(14)\qquad \varrho_1^0 = \varrho_1 - a, \qquad \varrho_2^0 = \varrho_2 - a.$$

Die Differenz entsprechender Hauptkrümmungsradien der ursprünglichen und der Parallelfläche ist also ihrem absoluten Betrage nach gleich dem Abstande der beiden Flächen.

Dies Resultat wird geometrisch unmittelbar erkannt, wenn man beachtet, dass die gegebene und die ihr parallelen Flächen dasselbe Normalensystem haben; man hat nur noch das Resultat des § 26 hinzuzunehmen, nach welchem der Wert eines Hauptkrümmungsradius gleich ist der Entfernung des Flächenpunktes von dem Fusspunkte des kürzesten Abstandes einer bestimmten Nachbarnormale. Dass in Folge der Uebereinstimmung der Normalensysteme auch die Krümmungslinien beider Flächen einander entsprechen, bedarf keiner weiteren Ausführung.

Da entsprechende Hauptkrümmungscentra für die ganze Schaar von Parallelflächen zusammenfallen, so ist auch die Evolute aller dieser Flächen dieselbe. Stellt man daher die Aufgabe, die Flächen zu finden, für welche eine gegebene die eine Schale der Evolute bildet, so muss eine bestimmte Lösung derselben, wie sie durch die Gleichungen § 86 (3) angegeben wird, jedesmal eine ganze Schaar paralleler Flächen liefern können; mit anderen Worten, man muss, wenn man in diesen Gleichungen ϱ_1 durch $\varrho_1 - a$ ersetzt, ebenfalls eine Lösung des Problems erhalten. In der That folgt aus den Erörterungen des § 86 unmittelbar die Möglichkeit einer solchen Annahme. Sie kennzeichnet

sich analytisch u. a. dadurch, dass in der, zur Bestimmung von ϱ_1 dienenden Gleichung § 86 (18) diese Grösse nur in ihren Ableitungen vorkommt.

Die im § 87 besonders betrachteten Flächen, für welche

$$\overline{G_1} = \alpha \varrho_1^2 + 2\beta\varrho_1 + \gamma$$

ist, lassen sich hiernach auch als Evoluten von Flächen auffassen, welche denen von constantem Krümmungsmass parallel sind. Auf directem Wege findet man, dass die Hauptkrümmungsradien solcher Flächen durch die Relation

$$\alpha\varrho_1\varrho_2 + \beta(\varrho_1 + \varrho_2) + \gamma = 0$$

verbunden sind.

Die Construction, welche zu den Evoluten und zu den Parallelflächen führt, könnte dahin verallgemeinert werden, dass auf der Normale jedes Flächenpunktes A eine gegebene Function k der Hauptkrümmungsradien von A aus abgetragen und der geometrische Ort der Endpunkte A' der abgetragenen Strecken gesucht wird. Doch ist zu bemerken, dass nur in den beiden hier untersuchten Fällen die Fundamentalgrössen der abgeleiteten Flächen nicht die Ableitungen 4. Ordnung der Coordinaten der gegebenen Fläche enthalten. Es seien x', y', z' die Coordinaten der gesuchten Fläche; ihre zweiten Ableitungen gehen aus § 82 (1) dadurch hervor, dass x_1 durch $x', \ldots, \varrho_1$ durch k ersetzt wird. Falls nun k nicht, wie für die Parallelflächen, eine Constante ist, so kommen in den Grössen $\frac{\partial^2 k}{\partial u^2}, \ldots$ die Ableitungen von x, y, z bis zur 4. Ordnung hin vor, und bleiben auch in den Fundamentalgrössen 2. Ordnung enthalten, wenn nicht die Gleichung

$$X'X + Y'Y + Z'Z = 0$$

stattfindet, d. h. die Normale der abgeleiteten Fläche auf der Normale der gegebenen senkrecht steht. Nun gilt für X' eine Gleichung der Form

$$X'T' = \lambda X + \mu \frac{\partial x}{\partial u} + \nu \frac{\partial x}{\partial v},$$

mithin ist

$$T'\Sigma X'X = \lambda,$$

und die Ausrechnung ergibt den Wert

$$\lambda = \frac{1}{T^3}\left[(\eta\vartheta' - \vartheta\eta')\,k^2 + (\eta + \vartheta')\,T^2 k + T^4\right],$$

dessen Nullsetzung nach § 12 (11) für k einen der beiden Hauptkrümmungsradien liefert. Man gelangt also zu der Krümmungsmittelpunktsfläche zurück.

V. Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Curven auf gegebener Fläche.

§ 89.

Eine krumme Linie, welche auf einer gegebenen Fläche liegt, kann, wie schon im § 1 angegeben, dadurch dargestellt werden, dass u und v als Functionen einer unabhängigen Variablen t bestimmt und die Ausdrücke

$$u = f_1(t), \qquad v = f_2(t) \tag{1}$$

in die Flächengleichungen substituirt werden. Bei Elimination von t ergibt sich die Darstellung

$$\varphi(u, v) = 0, \tag{2}$$

von welcher im Vorhergehenden vielfach Gebrauch gemacht wurde. Endlich kann, wie z. B. bei einer Krümmungslinie, die Function φ erst durch Integration einer Differentialgleichung

$$U(u, v)\,du + V(u, v)\,dv = 0 \tag{3}$$

zu ermitteln sein. In diesem Fall wird man die Formeln der Curventheorie so zu transformiren suchen, dass sie nur von den gegebenen Grössen U und V abhängen.

Bevor auf die verschiedenen Annahmen näher eingegangen wird, sei an die Vorstellungen erinnert, mit deren Hilfe man die Eigenschaften der Raumcurven im Allgemeinen zu untersuchen pflegt.

Durch jeden Punkt A einer Raumcurve gehen drei auf einander senkrechte gerade Linien hindurch, welche zu der Curve in enger Beziehung stehen: die Tangente, die Binormale und die Hauptnormale. Die Winkel, welche diese Geraden mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen bilden, seien bezeichnet mit

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ für die Tangente,
$\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ für die Binormale,
$\alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$ für die Hauptnormale.

Um sie eindeutig zu definiren, kommt es darauf an, für jede der vorgenannten Geraden eine bestimmte Richtung von der entgegengesetzten unterscheiden zu können. Bei der Tangente geschieht dies dadurch, dass man sie als Grenzlage der Verbindungslinie von A mit einem beliebigen, ebenfalls auf der Curve gelegenen Punkte B auffasst (cf. § 4). Sind dx, dy, dz die Incremente der Coordinaten von A beim

Uebergange zu B, falls B dem ersten Punkte beliebig nahe angenommen wird, so kann man setzen

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \tag{4}$$

für positives $ds = AB$. Diese bereits öfter gebrauchten Ausdrücke sollen die positive Richtung der Tangente definiren, welche demnach von einem willkürlich zu wählenden Princip des Fortganges auf der Curve abhängt.

Die positive Richtung der Hauptnormale wird zweckmässig mit Hilfe der Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes bestimmt, welcher auf der Hauptnormale gelegen ist. Für sie gelten die (im § 10 schon benutzten) Gleichungen:

$$\xi - x = \frac{(b\,dz - c\,dy)\,ds^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \ldots,$$

aus welchen

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{5}$$

folgt, für r als Radius der ersten Krümmung. Dem Krümmungsradius ist im § 9 ein Vorzeichen beigelegt worden, um den Meusnier'schen Satz in einfacher Weise aussprechen zu können. Nimmt man von jetzt ab r als positive Grösse an, so bleibt dieser Satz in der Form

$$r = |\,\varrho\,| \cos\varphi \tag{6}$$

bestehen.

Es sei nun die von A nach dem Krümmungscentrum gehende Richtung der Hauptnormale die positive, also

$$\cos\alpha'' = \frac{\xi - x}{r}, \ldots;$$

dann folgt durch Einsetzen:

$$\begin{cases} \cos\alpha'' = \dfrac{b\,dz - c\,dy}{ds\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \cos\beta'' = \dfrac{c\,dx - a\,dz}{ds\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \cos\gamma'' = \dfrac{a\,dy - b\,dx}{ds\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{cases} \tag{7}$$

Der Contingenzwinkel der Curve, d. h. präciser der unendlich kleine Bogen eines Kreises vom Radius 1, welcher zu dem Winkel der Tangenten in A und B als Centriwinkel gehört, sei mit $d\omega$ bezeichnet, und der Torsionswinkel, welcher die analoge Bedeutung für die beiden benachbarten Binormalen hat, heisse $d\omega'$. Dann gelten, wenn noch r' den (ebenfalls beständig positiven) Radius der zweiten Krümmung bedeutet, die Gleichungen

(8) $$d\omega = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}$$

(9) $$d\omega' = \sqrt{(d\cos\alpha')^2 + (d\cos\beta')^2 + (d\cos\gamma')^2}$$

(10) $$\frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{r}$$

(11) $$\frac{d\omega'}{ds} = \frac{1}{r'}.$$

Ferner erhält man leicht durch Ausrechnung:

(12) $$\frac{d\cos\alpha}{d\omega} = \cos\alpha'', \quad \frac{d\cos\beta}{d\omega} = \cos\beta'', \quad \frac{d\cos\gamma}{d\omega} = \cos\gamma''.$$

Diesem System von Differentialrelationen lassen sich zwei andere an die Seite setzen, deren eines zur Bestimmung der positiven Richtung der Binormale dient. Sie können auf folgende Weise abgeleitet werden.

Es seien α, β, γ die Richtungswinkel einer beliebigen Geraden, sodass

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ist. Die Gerade denken wir uns als einer gegebenen Schaar angehörig; dann sind die Grössen, welche ihre Lage bestimmen, d. h. namentlich die Richtungscosinus, eindeutige Functionen einer Variablen t. Jeder Richtung $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ werde eine andere, $(\alpha''\ \beta''\ \gamma'')$, vermöge der Gleichungen (12) zugeordnet. Dann lässt sich zunächst leicht zeigen, dass je zwei entsprechende Linien auf einander senkrecht sind. Denn aus

$$\Sigma\cos^2\alpha = 1$$

wird durch Differentiation erhalten

$$\Sigma\cos\alpha\, d\cos\alpha = 0,$$

d. h. mit Berücksichtigung von (12):

(13) $$\Sigma\cos\alpha\cos\alpha'' = 0.$$

Eine dritte Richtung, $(\alpha'\ \beta'\ \gamma')$, sei auf den beiden ersten senkrecht, sodass die Relationen

(14) $$\Sigma\cos\alpha\cos\alpha' = 0$$

(15) $$\Sigma\cos\alpha'\cos\alpha'' = 0$$

bestehen, zu welchen noch

(16) $$\Sigma\cos^2\alpha' = 1$$

hinzutritt. Bildet man die Differentiale von (14) und (16) und beachtet (15), so folgt

$$\Sigma\cos\alpha\, d\cos\alpha' = 0, \qquad \Sigma\cos\alpha'\, d\cos\alpha' = 0.$$

Für die Differentiale $d\cos\alpha', \ldots$ gelten also dieselben Gleichungen, welchen nach (13) und (15) auch $\cos\alpha'', \ldots$ genügen. Daher ist

$$d\cos\alpha' : d\cos\beta' : d\cos\gamma' = \cos\alpha'' : \cos\beta'' : \cos\gamma'' = d\cos\alpha : d\cos\beta : d\cos\gamma,$$

und hieraus ergibt sich weiter

$$\frac{d\cos\alpha'}{d\omega'} = \pm\cos\alpha'', \ldots$$

Ueber die positive Richtung der dritten Geraden sei nun so verfügt, dass in diesen Gleichungen die oberen Zeichen gelten. Die Voraussetzungen, welche zu den Gleichungen führten, bestehen für die Tangente, Hauptnormale und Binormale irgend einer Raumcurve, und man erhält

$$(17)\quad \frac{d\cos\alpha'}{d\omega'} = \cos\alpha'', \quad \frac{d\cos\beta'}{d\omega'} = \cos\beta'', \quad \frac{d\cos\gamma'}{d\omega'} = \cos\gamma''.$$

Unter den neun eingeführten Richtungscosinus besteht u. a. die Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1,$$

aus welcher folgt

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\alpha'\, d\cos\alpha' + \cos\alpha''\, d\cos\alpha'' = 0,$$

oder mit Hinzunahme von (12) und (17):

$$(18)\quad \begin{cases} d\cos\alpha'' = -\cos\alpha\, d\omega - \cos\alpha'\, d\omega', \text{ und ebenso} \\ d\cos\beta'' = -\cos\beta\, d\omega - \cos\beta'\, d\omega' \\ d\cos\gamma'' = -\cos\gamma\, d\omega - \cos\gamma'\, d\omega'. \end{cases}$$

Aus den letzten Formeln ergibt sich noch für den Winkel $d\omega''$ zweier benachbarten Hauptnormalen, welcher zunächst (entsprechend (8, 9)) durch die Gleichung

$$d\omega'' = \sqrt{(d\cos\alpha'')^2 + (d\cos\beta'')^2 + (d\cos\gamma'')^2}$$

zu definiren ist, der Ausdruck

$$(19)\qquad d\omega'' = \sqrt{d\omega^2 + d\omega'^2}.$$

Die Grösse $d\omega''$ ist also, insofern sie in einfacher Weise aus $d\omega$ und $d\omega'$ zusammengesetzt ist, im Allgemeinen nicht besonders in Betracht zu ziehen.

Die Relationen (12, 17, 18), welche als die Frenet'schen Formeln bezeichnet werden, gestatten in Verbindung mit (10), (11), die Differentiale der Richtungscosinus der Tangente, Binormale und Hauptnormale durch diese Cosinus selbst, das Bogenelement der Raumcurve und ihre beiden Krümmungen auszudrücken. Denn es folgt

$$(20)\qquad d\cos\alpha = \frac{ds}{r}\cos\alpha'', \ldots$$

$$(21)\qquad d\cos\alpha' = \frac{ds}{r'}\cos\alpha'', \ldots$$

$$(22)\qquad d\cos\alpha'' = -ds\left(\frac{\cos\alpha}{r} + \frac{\cos\alpha'}{r'}\right), \ldots$$

§ 90.

Liegt die betrachtete Raumcurve auf einer gegebenen Fläche, so kann man zur Ermittelung ihrer ersten Krümmung in einem Punkte A folgendermassen verfahren. Man denke sich auf der Hauptnormale, von A aus nach dem Krümmungscentrum hin, eine Strecke abgetragen, welche gleich (oder proportional) der Krümmung ist, und diese Strecke auf die Tangentialebene und auf die Normale projicirt. φ und ψ seien die Winkel, welche die Hauptnormale mit der Flächennormale und mit der, in der Berührungsebene gelegenen Normale der Curve bildet. Dann ist:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{1}{r}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\cos\psi\right)^2,$$

oder, nach dem Meusnier'schen Satze [§ 89 (6)]:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\cos\psi}{r}\right)^2 = \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + g^2. \tag{1}$$

Da nun der Ausdruck von ϱ bekannt ist, so hat man nur die Grösse g zu bestimmen, was zunächst für eine Coordinatenlinie $u = \text{const.}$ ausgeführt werden soll.

Das Coordinatensystem auf der Fläche sei ein rechtwinkliges, sodass die Projection der Krümmung auf die Tangentialebene in die Tangente der Linie $v = \text{const.}$ hineinfällt. Dann ist

$$\cos^2\psi = \left(\sum \cos\alpha'' \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,$$

mithin nach § 89 (20):

$$\left(\frac{\cos\psi}{r}\right)^2 = \frac{1}{E}\left(\sum \frac{d\cos\alpha}{ds}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,$$

und weiter, da

$$ds = \pm\sqrt{G}\,dv, \quad d\cos\alpha = \pm\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\cdot dv$$

zu setzen ist:

$$g_u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{EG}}\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \tag{2}$$

wenn g_u den Wert von g für die Linie $u = \text{const.}$ bezeichnet. Durch Ausführung der Differentiation folgt, mit Benutzung von $F = 0$ und der Gleichungen § 27 (1, 4):

$$g_u = -\frac{\varepsilon}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u}. \tag{3}$$

Die Grösse g kann noch auf eine andere Weise erklärt werden, welche zugleich dazu dient, das Vorzeichen zu fixiren. Es seien A und B benachbarte Punkte der betrachteten Curve, $AB'C'$ und DBC

die beiden geodätischen Linien, welche jene Curve in A und B berühren, AE und BF die durch A und B gehenden u-Linien. Die Richtungen AB, AE, BF seien die positiven. Der Winkel $B'DB = dw$, welchen die beiden geodätischen Linien in ihrem Schnittpunkte mit einander bilden, heisst der geodätische Contingenzwinkel der Curve AB. Wird nun, wie im § 54,

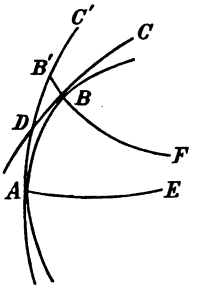


Fig. 6.

$$\widehat{DAE} = w, \quad \widehat{C'B'B} = w + dw,$$

ferner

$$\widehat{CBF} = w + \delta w$$

gesetzt, so ergibt sich bis auf Grössen, welche gegen die vorkommenden Differentiale unendlich klein sind,

$$dw' = dw - \delta w.$$

Der Differentialquotient

$$\frac{dw - \delta w}{ds} = \frac{1}{R} \tag{4}$$

definirt nach Wert und Vorzeichen die (von Liouville so genannte) geodätische Krümmung der Curve AB im Punkte A; R wird als Radius der geodätischen Krümmung bezeichnet. Diese Grösse kann nach der getroffenen Festsetzung auch negative Werte haben. Denn würde man z. B. in der Figur die u-Linien nach derjenigen Seite hin positiv nehmen, nach welcher die gegebene Curve convex ist, so würde $\delta w > dw$ werden.

Für die oben gemachte Annahme ist $w = \frac{\pi}{2}$, $w + \delta w = \frac{\pi}{2}$, also $\frac{1}{R} = \frac{dw}{ds}$. Ferner ergibt sich aus § 54 (5, 7) für $F = 0$:

$$\sqrt{E}\sqrt{G}\, dw = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\, du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\, dv, \qquad \operatorname{ctg} w = \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{du}{dv},$$

und ds hat den Wert $\sqrt{G}\, dv$; mithin wird für die Linie $u = \text{const.}$

$$\frac{1}{R_u} = \frac{1}{2G\sqrt{E}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\frac{du}{dv} - \frac{\partial G}{\partial u}\right) = \frac{1}{2G\sqrt{E}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\sqrt{\frac{G}{E}}\operatorname{ctg} w - \frac{\partial G}{\partial u}\right),$$

d. h.

$$\frac{1}{R_u} = -\frac{1}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \tag{5}$$

ein Wert, welcher auch aus (3) für $\varepsilon = +1$ hervorgeht. Man hat daher allgemein

$$\frac{1}{R_u} = g_u = \frac{\cos\psi}{r}, \tag{6}$$

wenn unter ψ der Winkel verstanden wird, welchen die positive Richtung der Hauptnormale mit der positiven u-Linie bildet.

Bei Vertauschung von u mit v ergibt sich

$$\frac{1}{R_v} = g_v = -\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \tag{7}$$

Die Definition (4) lässt sich unmittelbar auf eine beliebige Curve übertragen, und ebenso bleibt die Gleichung (6) bei passender Erklärung des Winkels ψ allgemein bestehen. Denkt man sich von A aus auf der, in der Tangentialebene liegenden Normale der Curve eine Strecke $|R|$ nach derjenigen Richtung abgetragen, welcher die Curve ihre concave Seite zukehrt, so wird der Endpunkt als Mittelpunkt der geodätischen Krümmung bezeichnet. Die Gleichung (6) oder allgemein

$$r = R\cos\psi \tag{8}$$

besagt, dass dieser Punkt auch erhalten wird als Schnittpunkt der Tangentialebene mit einer Geraden, welche im Krümmungsmittelpunkte auf der Schmiegungsebene der Curve senkrecht steht.

Die geodätische Krümmung bildet für die Curven auf krummen Flächen die naturgemässe Verallgemeinerung der Krümmung ebener Curven. Sie ist mit der Krümmung im gewöhnlichen Sinne identisch, wenn die Fläche als Ebene vorausgesetzt wird. — Ist die gegebene Linie eine geodätische, so fallen die beiden Curven AC' und BC mit ihr zusammen, und die geodätische Krümmung wird gleich Null.

§ 91.

Es sei jetzt für eine beliebige Curve

$$\varphi(u, v) = 0 \tag{1}$$

(oder $\varphi(u, v) = C$) der Ausdruck der geodätischen Krümmung zu finden. Wir betrachten sie als einer Schaar

$$\varphi(u, v) = \text{const.} \tag{2}$$

angehörig und nehmen die Curven (2) als v'-Linien eines Coordinatensystems, ihre orthogonalen Trajectorien

$$\psi(u, v) = v' = \text{const.} \tag{3}$$

als u'-Linien an. Bezeichnet dann g die geodätische Krümmung einer Curve (2), so ist nach (5) des vorigen Paragraphen:

$$g = -\frac{1}{2G'\sqrt{E'}}\frac{\partial G'}{\partial u'}. \tag{4}$$

Diesen Ausdruck transformiren wir zunächst durch Einführung der Differentialparameter 1. Ordnung (§ 68) und setzen zur Abkürzung

$$\Delta^1(\varphi) = k_1, \qquad \Delta^1(\psi) = k_2. \tag{5}$$

Dabei wird wegen der Invarianz des Differentialparameters und in Folge von $F' = 0$ (oder $\Delta(u', v') = 0$):

$$k_1 = \frac{1}{E'}, \quad k_2 = \frac{1}{G'}, \tag{6}$$

mithin

$$g = -\frac{1}{2} k_2 \sqrt{k_1} \frac{\partial \frac{1}{k_2}}{\partial u'}. \tag{7}$$

An Stelle der Ableitung von $\frac{1}{k_2}$ kann der Differentialparameter 2. Ordnung der Function φ oder u' eingeführt werden. Nach § 68 (16) wird nämlich

$$\Delta^2(u') = \frac{1}{\sqrt{E'G'}} \frac{\partial \sqrt{\frac{G'}{E'}}}{\partial u'} = \sqrt{k_1 k_2} \frac{\partial \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}}{\partial u'} = \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial \frac{k_1}{k_2}}{\partial u'} \tag{8}$$

oder

$$\Delta^2(u') = \frac{1}{2} \left(k_1 k_2 \frac{\partial \frac{1}{k_2}}{\partial u'} + \frac{\partial k_1}{\partial u'} \right). \tag{9}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (7):

$$g = -\frac{1}{\sqrt{k_1}} \left(\Delta^2(u') - \frac{1}{2} \frac{\partial k_1}{\partial u'} \right). \tag{10}$$

Es bleibt noch übrig, die Ableitung $\frac{\partial k_1}{\partial u'}$ durch Differentialquotienten nach den ursprünglichen Coordinaten zu ersetzen. Dies kann dadurch geschehen, dass man die Gleichung

$$\frac{\partial k_1}{\partial u'} = \frac{\partial k_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial k_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u'}$$

aufstellt und die Umkehrungsformeln § 5 (10) benutzt, welche wegen

$$T\Delta = \sqrt{E'G'} = \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}}$$

die Form erhalten:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial u'} = \frac{1}{T\sqrt{k_1 k_2}} \frac{\partial v'}{\partial v}, & \frac{\partial u}{\partial v'} = -\frac{1}{T\sqrt{k_1 k_2}} \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} = -\frac{1}{T\sqrt{k_1 k_2}} \frac{\partial v'}{\partial u}, & \frac{\partial v}{\partial v'} = \frac{1}{T\sqrt{k_1 k_2}} \frac{\partial u'}{\partial u}, \end{cases} \tag{11}$$

Doch empfiehlt es sich, die letzteren einer weiteren Transformation zu unterwerfen, mit Hilfe der Gleichungen

$$\Delta^1(u') = k_1, \quad \Delta^1(v') = k_2, \quad \Delta(u', v') = 0,$$

welche bei Einführung der Abkürzungen

$$\begin{cases} G \frac{\partial u'}{\partial u} - F \frac{\partial u'}{\partial v} = P_1, & E \frac{\partial u'}{\partial v} - F \frac{\partial u'}{\partial u} = Q_1 \\ G \frac{\partial v'}{\partial u} - F \frac{\partial v'}{\partial v} = P_2, & E \frac{\partial v'}{\partial v} - F \frac{\partial v'}{\partial u} = Q_2 \end{cases} \tag{12}$$

geschrieben werden können:

$$(13)\quad \begin{cases} P_1 \frac{\partial u'}{\partial u} + Q_1 \frac{\partial u'}{\partial v} = T^2 k_1, \quad P_2 \frac{\partial v'}{\partial u} + Q_2 \frac{\partial v'}{\partial v} = T^2 k_2 \\ P_2 \frac{\partial u'}{\partial u} + Q_2 \frac{\partial u'}{\partial v} = P_1 \frac{\partial v'}{\partial u} + Q_1 \frac{\partial v'}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Aus ihnen folgen, da

$$P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = T^2 \left(\frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v} \right) = T^3 \sqrt{k_1 k_2}$$

wird, für die Ableitungen die Werte:

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial u} = \frac{Q_2}{T} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad \frac{\partial u'}{\partial v} = -\frac{P_2}{T} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \\ \frac{\partial v'}{\partial u} = -\frac{Q_1}{T} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}, \quad \frac{\partial v'}{\partial v} = \frac{P_1}{T} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}, \end{cases}$$

welche in (8) eingesetzt die Resultate liefern:

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial u'} = \frac{1}{T^2 k_1} \left(G \frac{\partial u'}{\partial u} - F \frac{\partial u'}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial v'} = \frac{1}{T^2 k_2} \left(G \frac{\partial v'}{\partial u} - F \frac{\partial v'}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial u'} = \frac{1}{T^2 k_1} \left(E \frac{\partial u'}{\partial v} - F \frac{\partial u'}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial v'} = \frac{1}{T^2 k_2} \left(E \frac{\partial v'}{\partial v} - F \frac{\partial v'}{\partial u} \right). \end{cases}$$

Diese, zuerst von Beltrami aufgestellten Formeln sind deshalb besonders wichtig, weil in ihnen die Ableitungen von u und v nach u' nur durch die Ableitungen von u' nach u und v ausgedrückt werden, ohne dass die Function v' vorkommt; und analog für die beiden anderen Ableitungen.

Ist nun χ irgend eine Function von u und v, welche beim Uebergange zu Orthogonal-Coordinaten den Ausdruck $\bar{\chi}(u', v')$ erhält, so folgt mit Benutzung von (15):

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'} = \frac{1}{T^2 k_1} \left[G \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial u} - F \left(\frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial u} \right) + E \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial v} \right]$$

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'} = \frac{1}{T^2 k_2} \left[G \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial u} - F \left(\frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial u} \right) + E \frac{\partial v'}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial v} \right],$$

d. h. nach § 68 (6, 3)

$$(16)\quad \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'} = \frac{\Delta(u', \chi)}{k_1}, \quad \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'} = \frac{\Delta(v', \chi)}{k_2}.$$

Nimmt man jetzt $\chi = \Delta^1(u') = \bar{\chi} = k_1$ und substituirt in (10), so ergibt sich

$$g = -\frac{1}{\sqrt{\Delta^1(u')}} \left[\Delta^2(u') - \frac{1}{2} \frac{\Delta(u', \Delta^1(u'))}{\Delta^1(u')} \right],$$

oder endlich, wenn für u' wieder φ geschrieben wird:

$$(17) \qquad g = \frac{1}{2} \frac{\Delta(\varphi, \Delta^1(\varphi))}{(\Delta^1(\varphi))^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Delta^2(\varphi)}{(\Delta^1(\varphi))^{\frac{1}{2}}}.$$

Dieser Ausdruck, aus welchem jede Beziehung auf die Orthogonalschaar $\psi = \text{const.}$ verschwunden ist, stellt den gesuchten Wert der geodätischen Krümmung für die gegebene Curve dar.

§ 92.

Die für g gefundene Formel kann in mannigfacher Weise transformirt werden. Beachtet man z. B. die Gleichung

$$\Delta(\varphi, f(\psi)) = f'(\psi)\, \Delta(\varphi, \psi)$$

und nimmt

$$f(\psi) = \frac{1}{\sqrt{\psi}},$$

so folgt

$$\Delta(\varphi, \Delta^1(\varphi)) = -2(\Delta^1(\varphi))^{\frac{3}{2}}\, \Delta\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta^1(\varphi)}}\right),$$

mithin weiter:

$$(1) \qquad g = -\Delta\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta^1(\varphi)}}\right) - \frac{\Delta^2(\varphi)}{\sqrt{\Delta^1(\varphi)}}.$$

Setzt man nun für die Differentialparameter 1. und 2. Ordnung und den Zwischenparameter ihre Werte:

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta^1(\varphi) &= \frac{1}{T^2}\left[G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right] \\ \Delta^2(\varphi) &= \frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{T}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right] \\ \Delta(\varphi, \psi) &= \frac{1}{T^2}\left[\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u} + \left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\right], \end{cases}$$

so ergibt sich

$$g = -\frac{1}{T}\left[\frac{1}{T}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{\Delta^1(\varphi)}} + \frac{1}{T}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{\Delta^1(\varphi)}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\Delta^1(\varphi)}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{1}{\sqrt{\Delta^1(\varphi)}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{T}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right]$$

oder

$$(3) \qquad g = -\frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}}\right].$$

Für $\varphi = u$, $\varphi = v$ erhält man Ausdrücke für die geodätische Krümmung der Coordinatenlinien:

$$(4)\qquad \begin{cases} g_u = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{F}{\sqrt{G}}\right) \\ g_v = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{F}{\sqrt{E}}\right), \end{cases}$$

welche für $F = 0$ in die des § 90 ((5) und (7)) übergehen. Sie erhalten bei Benutzung der Grössen J die Form

$$(5)\qquad g_u = \frac{T J_1''}{G\sqrt{G}}, \qquad g_v = -\frac{T J_2}{E\sqrt{E}}.$$

Von Interesse ist die Darstellung des Krümmungsmaasses mit Hilfe von g_u und g_v, auf welche Liouville zuerst aufmerksam gemacht hat. Nimmt man für K den ersten Wert aus § 67 und führt an Stelle von $\frac{\partial G}{\partial u}$ die Grösse g_u ein, benutzt dann fortgesetzt die Ausdrücke von $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ durch die Fundamentalgrössen, so findet sich leicht

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta = -2T\left(g_u\sqrt{G} + \frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right),$$

und entsprechend:

$$\frac{\partial E}{\partial v} - \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\cos\vartheta = -2T\left(g_v\sqrt{E} + \frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right),$$

mithin

$$(6)\qquad K = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}(g_u\sqrt{G}) + \frac{\partial}{\partial v}(g_v\sqrt{E})\right].$$

Ist die betrachtete Curvenschaar durch eine Differentialgleichung

$$U du + V dv = 0$$

definirt, so kann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \lambda U, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \lambda V$$

gesetzt und λ als positiv angenommen werden. Dann ergibt sich aus (3):

$$(7)\qquad g = -\frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{GU - FV}{\sqrt{G U^2 - 2FUV + EV^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{EV - FU}{\sqrt{G U^2 - 2FUV + EV^2}}\right].$$

Ist endlich die Fläche durch eine Gleichung

$$(8)\qquad z = h(x, y)$$

gegeben, so folgt aus § 90 (6) für g der Wert

$$(9)\qquad g = \pm\frac{c - ap - bq}{ds^3\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

wo die in ds, a, b, c enthaltenen Differentiale aus (8) in Verbindung mit einer analogen Gleichung $z = h_1(x, y)$ herzuleiten wären.

Allgemein ergibt sich aus § 90:

$$g = \pm \frac{Xa + Yb + Zc}{ds^3}, \tag{10}$$

ein Ausdruck, dessen Zähler im § 53 berechnet worden ist. Dividirt man die linke Seite der dort gegebenen Gleichung (9) durch Tds^3, oder multiplicirt die linke Seite von (10) mit $\frac{T}{ds^3}$, so erhält man eine Darstellung von g mit Hilfe der Differentiale von u und v, welche sich auf die gegebene Curve beziehen.

§ 93.

Der Umstand, dass der Wert § 91 (17), ausser von der Function φ, nur von den Fundamentalgrössen erster Ordnung der gegebenen Fläche abhängt, ist für die Theorie der Abwickelung von Wichtigkeit. Zunächst ist aus der geometrischen Bedeutung der Grösse g unmittelbar ersichtlich, dass ihr Ausdruck bei einer Coordinaten-Transformation in den formell gleichgebildeten übergehen muss. Analytisch würde dies aus der Theorie der Functionen $\Delta^1(\varphi)$, $\Delta^2(\varphi)$, $\Delta(\varphi, \psi)$ folgen (§ 63, 64). Beachtet man nun den Zusammenhang zwischen der Transformation der Fundamentalgrössen 1. Ordnung und der Theorie der Abwickelung, wie er nach § 27 stattfindet, so ergibt sich: Sind zwei, auf einander abwickelbare Flächen gegeben, und werden auf ihnen zwei entsprechende Curven

$$\varphi(u, v) = \text{const.}, \qquad \bar{\varphi}(u', v') = \text{const.}$$

(wo $\varphi(u,v) = \bar{\varphi}(u', v')$) angenommen, so hat die geodätische Krümmung dieser Curven in entsprechenden Punkten denselben Wert; oder kürzer: Bei der Biegung einer Fläche bleibt die geodätische Krümmung einer Linie $\varphi(u, v) = \text{const.}$ ungeändert.

Es sei nun allgemein eine Function von u und v durch folgende zwei Eigenschaften definirt: 1) Sie hänge, ausser von gegebenen Functionen φ, ψ etc., nur von den Fundamentalgrössen erster Ordnung der gegebenen Fläche ab; 2) sie gehe bei einer beliebigen Transformation der Coordinaten in die, aus $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, ... E', F', G' in derselben Weise zusammengesetzte Function über. Dann ist also:

$$f\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots \varphi, \psi, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \ldots\right) = \tag{1}$$

$$f\left(E', F', G', \frac{\partial E'}{\partial u'}, \ldots \bar{\varphi}, \bar{\psi}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u'}, \ldots\right).$$

Ausdrücke dieser Art sind von Beltrami als invariable Functionen bezeichnet worden. Sie stellen geometrische Eigenschaften von Curven oder Curvenschaaren, oder Beziehungen zwischen mehreren solchen Curvenschaaren dar, welche bei einer Biegung der Fläche unverändert bleiben. Die Differentialparameter 1. und 2. Ordnung einer Function φ, der Zwischenparameter von φ und ψ sind derartige Grössen. Aus ihnen lassen sich die trigonometrischen Functionen des Winkels zweier Curven, dessen Invariabilität unmittelbar ersichtlich ist, zusammensetzen. Denn nach § 6 ist z. B.

$$\cos\vartheta' = -\frac{\Delta(\varphi,\psi)}{\sqrt{\Delta^1(\varphi)\cdot\Delta^1(\psi)}}. \tag{2}$$

Ebenso ist die geodätische Krümmung, wie oben abgeleitet, mit Hilfe der Grössen Δ darstellbar.

Enthält der Ausdruck f keine willkürlichen Functionen $\varphi, \psi, \ldots$, sondern nur u, v, E, F, G (und die Ableitungen dieser Fundamentalgrössen), so heisst er nach Beltrami eine absolute Function, nach Weingarten eine Biegungsinvariante der Fläche. Man kann sich leicht überzeugen, dass in einer solchen die Coordinaten u, v nicht explicite vorkommen können. Angenommen nämlich, es sei

$$f\left(u, v, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) = f\left(u', v', E', F', G', \frac{\partial E'}{\partial u'}, \ldots\right);$$

dann setze man

$$u' = u + a, \qquad v' = v + b,$$

wo a und b willkürliche Constanten bedeuten. Es wird

$$E' = E, \quad F' = F, \quad G' = G, \quad \frac{\partial E'}{\partial u'} = \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots,$$

mithin

$$f\left(u, v, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) = f\left(u+a, v+b, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right);$$

und diese Relation kann nur bestehen, wenn $\frac{\partial f}{\partial u}$ und $\frac{\partial f}{\partial v}$ identisch verschwinden. Hiernach ist

$$f\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) = f\left(E', F', G', \frac{\partial E'}{\partial u'}, \ldots\right) \tag{3}$$

die charakteristische Gleichung einer absoluten Function.

Wie im Vorhergehenden auf verschiedenen Wegen nachgewiesen, ist das Gauss'sche Krümmungsmass K eine Biegungsinvariante. Und zwar kann man zeigen, dass K die einfachste Function dieser Art ist. Setzt man in die Ausdrücke der invariablen Functionen für $\varphi, \psi, \ldots$ absolute Functionen ein, so erhält man neue Biegungsinvarianten, da die entstehenden Werte Gleichungen von der Form (3)

genügen. So sind $\Delta^1(K)$, $\Delta^2(K)$, $\Delta(K, \Delta^1(K))$ etc. absolute Functionen. Von diesen können höchstens zwei für eine gegebene Fläche von einander unabhängig sein. Es ist für manche Untersuchungen zweckmässig, zwei solche Invarianten als krummlinige Coordinaten anzunehmen.

§ 94.

Man wird auf die geodätische Krümmung bei einer isoperimetrischen Aufgabe geführt, welche folgendermassen formulirt werden kann. Zwischen zwei Punkten A und B einer Fläche sei eine Curve gegeben; gesucht wird eine andere Curve mit denselben Endpunkten und von vorgeschriebener Länge, welche mit der ersten zusammen einen möglichst grossen Flächeninhalt einschliesst.

Angenommen, die Curve sei gefunden und werde auf die (xy)-Ebene projicirt; die Projection heisse $A'\,C'\,B'$. Längs dieser Linie ist y gleich einer, als eindeutig vorausgesetzten Function $\chi(x)$, welche durch Lösung der Aufgabe zu bestimmen ist. Wird die Fläche in der Form

$$z = \varphi(x, y) \tag{1}$$

gegeben, so hat der Flächeninhalt, welcher ein Maximum werden soll, den Ausdruck

$$\iint \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx\, dy = J.$$

Das Doppelintegral ist über dasjenige Gebiet zu erstrecken, welches durch die Linie $A'\,C'\,B'$ und die Projection $A'\,C_1\,B'$ der gegebenen Curve begrenzt wird. Längs der letzteren Projection sei y gleich der eindeutigen Function $f(x)$. Dann hat man für x_0 und x_1 als erste Coordinaten von A und B:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\chi(x)}^{f(x)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dy. \tag{2}$$

Die Länge der gesuchten Curve ist

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = l, \tag{3}$$

wo l eine gegebene Constante.

Verändert man die Curve ACB, jedoch so, dass ihre Länge $= l$ bleibt, so ändert sich im Allgemeinen auch die Projection $A'\,C'\,B'$, und y wird eine andere Function von x. Es sei $\chi + \eta$ die neue Function. Sie muss, an Stelle von χ in (2) eingeführt, einen Wert

J' liefern, welcher kleiner ist als J. Um die Differenz $J - J'$ zu finden, setzen wir noch das unbestimmte Integral $\int \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dy$, als Function von y betrachtet, $= W(y)$, und erhalten

$$J = \int_{x_0}^{x_1} (W(f) - W(\chi))\, dx,$$

$$J' = \int_{x_0}^{x_1} (W(f) - W(\chi + \eta))\, dx,$$

$$J - J' = \int_{x_0}^{x_1} (W(\chi + \eta) - W(\chi))\, dx.$$

Bei der Entwicklung nach Potenzen von η, welches beliebig klein angenommen werden kann, wird das Anfangsglied

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial W}{\partial \chi}\, \eta\, dx = \delta J,$$

und es ist

$$\frac{\partial W}{\partial \chi} = \frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{p^2 + q^2 + 1},$$

wo in der Wurzelgrösse noch χ für y gesetzt zu denken ist; mithin

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, .\, \eta\, dx. \tag{4}$$

Diese Grösse muss verschwinden, wenn J ein Maximum sein soll.

Hat jetzt s' die analoge Bedeutung für s wie J' für J, und wird

$$\varphi(x, \chi + \eta) - \varphi(x, \chi) = \zeta$$

gesetzt, so ergibt sich

$$s' = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{d(\chi + \eta)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d(\varphi + \zeta)}{dx}\right)^2}\, dx,$$

und man erhält für die Anfangsglieder der Entwickelung von $s' - s$ (cf. § 53) den Ausdruck

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d\chi}{ds}\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\varphi}{ds}\frac{d\zeta}{dx}\right) dx = \delta s.$$

Schreibt man für χ und φ wieder y und z und führt eine partielle Integration aus, so kommt

$$\delta s = \left[\eta \frac{dy}{ds} + \zeta \frac{dz}{ds}\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{d\frac{dy}{ds}}{dx} + \zeta \frac{d\frac{dz}{ds}}{dx}\right) dx, \tag{5}$$

wo der erste Ausdruck verschwindet, weil η und damit auch ζ für $x = x_0$ und $x = x_1$ gleich Null ist. Allgemein ergibt sich für ζ, bei Abkürzung auf die Glieder 1. Ordnung, der Wert

$$\zeta = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \eta = q\,\eta .$$

Da nun $s' - s = 0$ sein soll, so muss sicher auch δs verschwinden, und man erhält aus (5):

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{dx} + q \frac{d\frac{dz}{ds}}{dx}\right) \eta\, dx = 0. \tag{6}$$

Das Resultat ist also, dass für alle Werte von η, welche der Bedingung (6) genügen, die Gleichung $\delta J = 0$ oder

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot \eta\, dx = 0 \tag{7}$$

stattfinden muss. Hiernach ist y zu bestimmen.

Es sei zur Abkürzung

$$\begin{cases} \dfrac{d\frac{dy}{ds}}{dx} + q \dfrac{d\frac{dz}{ds}}{dx} = U \\ \sqrt{p^2 + q^2 + 1} = V, \end{cases} \tag{8}$$

ferner

$$\int_{x_0}^{x} V \eta\, dx = \omega(x) \tag{9}$$

gesetzt. Dann ist die Grösse η nur der Bedingung zu unterwerfen, dass die aus ihr gebildete Function ω für $x = x_1$ verschwindet; im Uebrigen ist η (immer innerhalb bestimmter Grenzen) vollkommen willkürlich. Entnimmt man aus (9)

$$\eta = \frac{\omega'(x)}{V}$$

und substituirt in (6), so wird

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{U}{V} \omega'(x)\, dx = 0,$$

d. h. bei nochmaliger Ausführung einer partiellen Integration und Benutzung der Gleichungen $\omega(x_0) = 0$, $\omega(x_1) = 0$:

$$\int_{x_0}^{x_1} d\frac{U}{V}\,\omega\,dx = 0. \tag{10}$$

Hierin ist ω eine willkürliche Function, welche nur an die eben benutzten Gleichungen gebunden ist. Daher ist schliesslich

$$d\frac{U}{V} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{U}{V} = \text{const.}$$

eine notwendige Bedingung für die Grösse y, welche der gestellten Aufgabe genügt. Werden für U und V ihre Werte substituirt, die Integrationsconstante mit $\frac{1}{h}$ bezeichnet, so ergibt sich

$$\frac{d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds}}{dx\sqrt{p^2+q^2+1}} = \frac{1}{h}. \tag{11}$$

Wenn man hier die Differentiale im Zähler entwickelt, so erhält man für die linke Seite nach einer leichten Umformung einen Wert, welcher mit § 92 (9) für $d^2x = 0$ übereinstimmt. Es wird also

$$g = \pm\frac{1}{h} \tag{12}$$

eine notwendige Eigenschaft der gesuchten Linien; das heisst: die Curven, welche bei gegebener Bogenlänge ein möglichst grosses Stück einer Fläche begrenzen, haben constante geodätische Krümmung.

§ 95.

Es seien die Coordinatenlinien $u = \text{const.}$ Curven von constanter geodätischer Krümmung, so gilt nach § 92 (4) die Gleichung

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{F}{\sqrt{G}}\right) = f(u), \tag{1}$$

und wenn dieselbe Eigenschaft für die Linien $v = \text{const.}$ vorausgesetzt wird:

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{F}{\sqrt{E}}\right) = g(v). \tag{2}$$

Nehmen wir im Besonderen an, dass beide Schaaren auf einander senkrecht seien, so wird:

$$(3) \qquad \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = f(u), \qquad \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = g(v),$$

und hieraus folgt bei Differentiation nach v resp. u:

$$\frac{\partial^2 \log\sqrt{G}}{\partial u\,\partial v} = Tf(u)\,g(v) = \frac{\partial^2 \log\sqrt{E}}{\partial u\,\partial v}$$

oder

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \log\frac{E}{G}}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Nach § 52 liefert diese Gleichung das Resultat: Sind zwei Schaaren von Linien constanter geodätischer Krümmung auf einander senkrecht, so bilden sie zugleich ein isometrisches Curvensystem.

Hat umgekehrt die geodätische Krümmung einer Linienschaar, welche mit einer anderen zusammen ein isometrisches System bildet, längs jeder Linie einen constanten Wert, so ist dies auch für die zweite Curvenschaar der Fall. Es seien wieder die beiden Schaaren zu Coordinatenlinien, und ihre Bestimmungsgrössen so gewählt, dass

$$E = G, \qquad F = 0$$

ist. Dann wird

$$(5) \qquad g_u = -\frac{1}{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u} = -\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial u}, \qquad g_v = \frac{\partial\frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial v}.$$

Nach der zweiten Annahme ist

$$\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial u} = f(u),$$

eine Gleichung, welche in der Form $\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)}{\partial u\,\partial v} = 0$ geschrieben, die Behauptung

$$\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial v} = g(v)$$

liefert. — Die Flächen, für welche die Voraussetzungen der obigen Sätze erfüllt sind, haben die Eigenschaft, dass das Quadrat ihres Linienelements auf die Form

$$(6) \qquad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U+V)^2}$$

gebracht werden kann, in welcher U nur von u, V nur von v abhängt.

Ein besonders einfacher Wert ergibt sich für g_u unter Zugrundelegung orthogonal-geodätischer Coordinaten. Für $E = 1$, $F = 0$ folgt zunächst, wie es nach § 90 (Schluss) der Fall sein muss,

$$g_v = 0, \tag{7}$$

ferner

$$g_u = \frac{-1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u}. \tag{8}$$

Die Gleichung (7) kann als Specialfall von (2) betrachtet werden. Nimmt man jetzt wieder, der Gleichung (1) entsprechend,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u} = f(u),$$

d. h. die Parallelcurven als Linien constanter geodätischer Krümmung an, so kommt

$$G = f_1(u)^2 g_1(v)^2,$$

und es wird bei passender Wahl der Coordinaten

$$ds^2 = du^2 + f_1(u)^2 dv^2.$$

Eine solche Form des Linienelements kommt aber den Rotationsflächen zu, d. h.: Existirt auf einer Fläche eine Schaar geodätischer Parallelcurven von constanter geodätischer Krümmung, so ist die Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar.

Für die erste Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche bildeten die Curven

$$\varrho_1 = \text{const.} \quad \text{und} \quad q = \text{const.}$$

(cf. § 84) ein orthogonal-geodätisches System. Stellt man nun die geodätische Krümmung der ersten Linienschaar nach der Gleichung (8) her, so erhält man zufolge § 84 (13):

$$g_{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1}. \tag{9}$$

Für die zweite Schale vertauschen sich ϱ_1 und ϱ_2. Es sind daher, abgesehen vom Vorzeichen, die Radien der geodätischen Krümmung für die Linien $\varrho_1 = \text{const.}$ resp. $\varrho_2 = \text{const.}$ auf den beiden Evolutenschalen einander gleich, und = der Differenz der Hauptkrümmungsradien der Evolvente.

Ist ϱ_2 allein von ϱ_1 abhängig, also g_{ϱ_1} Function von ϱ_1, so ergibt sich durch Combination mit dem vorhergehenden Resultat wieder der Weingarten'sche Satz. —

Die geodätische Krümmung der Krümmungscurven einer beliebigen Fläche lässt sich am leichtesten bestimmen, wenn man diese Curven selbst zu Coordinatenlinien wählt. Denn dann ist nach § 90 (5, 7):

$$g_1 = -\frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u}, \qquad g_2 = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v}. \tag{10}$$

Stellt man diese Ausdrücke mit § 44 (18) zusammen, so kann man auch schreiben

$$(11) \qquad g_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2(\varrho_2 - \varrho_1)\sqrt{E}} \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}, \qquad g_2 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1(\varrho_1 - \varrho_2)\sqrt{G}} \frac{\partial \varrho_1}{\partial v}.$$

Bei Substitution in § 83 (5, 5a) und Elimination von $\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \varrho_2}{\partial v}$ würden sich zwei Relationen zwischen g_1, g_2 und den vier Hauptkrümmungsradien der Evolute herausstellen.

Was die Asymptotencurven betrifft, welche durch die Bedingung $\frac{1}{\varrho} = 0$ definirt werden, so ergibt sich aus § 90 (1), dass ihre erste Krümmung mit dem absoluten Werte der geodätischen Krümmung übereinstimmt.

§ 96.

Die zweite Krümmung oder Torsion einer Curve auf gegebener Fläche ist in zwei Fällen leicht zu bestimmen: wenn nämlich die Flächennormale entweder mit der Binormale oder mit der Hauptnormale zusammenfällt. Für die erste Annahme, oder wenn die Schmiegungsebene die Fläche berührt, hat man es nach § 46 mit einer Asymptotencurve zu thun. Von dem, keiner Erörterung bedürftigen Fall, dass eine solche Linie gerade ist, sehen wir dabei ab. Aus den Gleichungen

$$(1) \qquad \cos\alpha' = \pm X, \quad \cos\beta' = \pm Y, \quad \cos\gamma' = \pm Z,$$
$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = d\sigma^2$$

folgt nun in Verbindung mit § 89 (9, 11):

$$(2) \qquad \frac{1}{r'} = \frac{d\sigma}{ds},$$

und wenn, wegen $\frac{1}{\varrho} = 0$,

$$d\sigma^2 = -K ds^2$$

gesetzt wird [§ 25 (3)]:

$$(3) \qquad \frac{1}{r'} = \sqrt{-K},$$

d. h. das Quadrat der Torsion einer Asymptotencurve ist gleich dem, mit negativem Zeichen genommenen Krümmungsmass der gegebenen Fläche. Diese Torsion bleibt daher bei einer Biegung der Fläche ungeändert.

Enthält die Schmiegungsebene der Curve die Flächennormale, oder ist diese mit der Hauptnormale identisch, so ist die Linie eine geodätische. Wir führen dann den Winkel

$$(4) \qquad d\omega'' = \sqrt{(d\cos\alpha'')^2 + (d\cos\beta'')^2 + (d\cos\gamma'')^2}$$

benachbarter Hauptnormalen ein, für welchen nach § 89 (19) die Gleichung

(5) $$d\omega''^2 = d\omega^2 + d\omega'^2$$

stattfindet. Dividirt man durch ds^2, setzt

(6) $$\cos\alpha'' = \pm X, \quad \cos\beta'' = \pm Y, \quad \cos\gamma'' = \pm Z$$

und beachtet, dass für eine geodätische Linie die erste Krümmung mit der Normalkrümmung übereinstimmen muss, so ergibt sich

(7) $$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'}\right)^2$$

oder

$$\left(\frac{1}{r'}\right)^2 = \frac{H}{\varrho} - K - \frac{1}{\varrho^2},$$

(8) $$\frac{1}{r'} = \sqrt{\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2}\right)},$$

d. h. endlich, nach § 26 (10, 8):

(9) $$\frac{1}{r'} = \pm \frac{-\vartheta\, du^2 - (\vartheta' - \eta)\, du\, dv + \eta'\, dv^2}{T(E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2)} = \pm \frac{\Gamma}{A}.$$

Ist nun eine beliebige Curve vorgelegt, so denken wir uns die geodätische Linie construirt, welche sie in dem gegebenen Punkte berührt. Die zweite Krümmung dieser Linie wird als geodätische Torsion der gegebenen Curve bezeichnet. Freilich entspricht dieser Begriff nicht vollständig dem der geodätischen Krümmung; vielmehr müsste als solche eigentlich die erste Krümmung der geodätischen Linie, d. h. die Normalkrümmung bezeichnet werden. — Da für die gegebene und für die geodätische Linie das Verhältnis $\frac{dv}{du}$ denselben Wert hat, so wird der Ausdruck der geodätischen Torsion $\frac{1}{R'}$ unmittelbar durch die Gleichung (9) bestimmt. Doch sollen für die geodätische Torsion, abweichend von der Torsion im gewöhnlichen Sinne, auch negative Werte zugelassen werden; und zwar sei allgemein gesetzt:

(10) $$\frac{1}{R'} = \frac{-\vartheta\, du^2 - (\vartheta' - \eta)\, du\, dv + \eta'\, dv^2}{T(E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2)}$$
$$= \frac{(EM - FL)\, du^2 + (EN - GL)\, du\, dv + (FN - GM)\, dv^2}{\sqrt{EG - F^2}\,(E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2)}.$$

Die Einführung von R' bietet dann ein Mittel dar, die quadratische Covariante Γ von A und B (cf. § 70) in anderer Weise auszudrücken als im § 26. Denn es wird

(11) $$\Gamma = \frac{ds^2}{R'}.$$

Setzt man du resp. dv gleich Null, so ergibt sich

$$(12) \qquad \frac{1}{R_u'} = \frac{\eta'}{TG}, \qquad \frac{1}{R_v'} = -\frac{\vartheta}{TE},$$

und wenn noch $F = 0$ genommen wird:

$$(13) \qquad \frac{1}{R_u'} = -\frac{1}{R_v'} = -\frac{M}{\sqrt{EG}},$$

aus welcher Gleichung ein neuer Ausdruck für M folgt (cf. § 22).

§ 97.

In der Theorie der Curven auf gegebener Fläche spielt ausser der Tangente, Binormale und Hauptnormale naturgemäss die Flächennormale eine ausgezeichnete Rolle. Wir bezeichnen im Folgenden ihre Richtungswinkel für eine bestimmte Direction n mit ξ, η, ζ, setzen also

$$(1) \qquad X = \pm\cos\xi, \qquad Y = \pm\cos\eta, \qquad Z = \pm\cos\zeta.$$

Die positiven Richtungen der drei ersten Geraden seien mit t, b, h bezeichnet, so dass

$$(2) \qquad (\alpha\beta\gamma) \equiv t, \qquad (\alpha'\beta'\gamma') \equiv b, \qquad (\alpha''\beta''\gamma'') \equiv h.$$

Durch das erste System der Frenet'schen Formeln [§ 89 (12)] wird man darauf geführt, eine Richtung $(\xi''\eta''\zeta'') \equiv l$ mittels der Gleichungen

$$(3) \qquad \frac{d\cos\xi}{d\sigma} = \cos\xi'', \qquad \frac{d\cos\eta}{d\sigma} = \cos\eta'', \qquad \frac{d\cos\zeta}{d\sigma} = \cos\zeta''$$

zu definiren. Dieselbe ist parallel der Tangente derjenigen Curve auf der Gauss'schen Kugel, welche der gegebenen bei der Abbildung durch parallele Normalen entspricht. Es werde ferner eine zu n und l senkrechte Gerade eingeführt, welche also ebenso wie l in der Tangentialebene der Fläche liegt. Ihre positive Richtung m sei durch die Gleichungen (cf. § 89)

$$(4) \qquad \frac{d\cos\xi'}{d\sigma'} = \cos\xi'', \qquad \frac{d\cos\eta'}{d\sigma'} = \cos\eta'', \qquad \frac{d\cos\zeta'}{d\sigma'} = \cos\zeta'',$$

$$(5) \qquad d\sigma' = \sqrt{(d\cos\xi')^2 + (d\cos\eta')^2 + (d\cos\zeta')^2}$$

bestimmt. Den Formeln (3) und (4) lassen sich noch folgende hinzufügen:

$$(6) \qquad \begin{cases} d\cos\xi'' = -\cos\xi\, d\sigma - \cos\xi'\, d\sigma' \\ d\cos\eta'' = -\cos\eta\, d\sigma - \cos\eta'\, d\sigma' \\ d\cos\zeta'' = -\cos\zeta\, d\sigma - \cos\zeta'\, d\sigma'. \end{cases}$$

Um die Beziehungen der Geraden l, m, n zur Tangente etc. zu untersuchen, setzen wir

in der Tangentialebene die Drehung von l nach m,
in der Normalebene der Curve die von b nach h

(jedesmal durch den rechten Winkel hindurch) als positiv fest, und bezeichnen durch ψ den, in positivem Sinne gerechneten Winkel von l mit t, durch φ den positiven Winkel von h mit n. Alsdann kann in allen Fällen gesetzt werden

$$(7) \qquad \cos(l, t) = \cos\psi, \qquad \cos(m, t) = \sin\psi$$

$$(8) \qquad \cos(h, n) = \cos\varphi, \qquad \cos(b, n) = \sin\varphi.$$

Ferner ist

$$(9) \qquad \cos(n, t) = 0.$$

Nun bestehen unter den neun Richtungscosinus der Geraden h, t, b gegen die Axen n, l, m sechs Relationen. Eine von diesen, nämlich

$$\cos^2(t, n) + \cos^2(t, l) + \cos^2(t, m) = 1$$

ist vermöge (7) und (9) von selbst erfüllt. Die übrigen erhalten die Form:

$$\cos^2(h, m) + \cos^2(h, l) = \sin^2\varphi$$
$$\cos^2(b, m) + \cos^2(b, l) = \cos^2\varphi$$
$$\sin\psi\cos(h, m) + \cos\psi\cos(h, l) = 0$$
$$\sin\psi\cos(b, m) + \cos\psi\cos(b, l) = 0$$
$$\cos(b, l)\cos(h, l) + \cos(b, m)\cos(h, m) = -\sin\varphi\cos\varphi.$$

Aus den vier ersten Gleichungen ergibt sich für $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$:

$$\cos(h, m) = -\varepsilon\cos\psi\sin\varphi, \qquad \cos(h, l) = \varepsilon\sin\psi\sin\varphi$$
$$\cos(b, m) = -\varepsilon'\cos\psi\cos\varphi, \qquad \cos(b, l) = \varepsilon'\sin\psi\cos\varphi,$$

während die letzte die Zeichenbestimmung $\varepsilon' = -\varepsilon$ liefert. Man hat demnach zur Vervollständigung der Formeln (7, 8, 9) die folgenden:

$$(10) \qquad \begin{cases} \cos(h, m) = -\varepsilon\cos\psi\sin\varphi, & \cos(h, l) = \varepsilon\sin\psi\sin\varphi \\ \cos(b, m) = \varepsilon\cos\psi\cos\varphi, & \cos(b, l) = -\varepsilon\sin\psi\cos\varphi. \end{cases}$$

Auch das Vorzeichen ε kann noch fixirt werden. Wird nämlich festgesetzt, dass das System der Axen h, t, b, in dieser Reihenfolge genommen, mit dem System n, l, m gleichstimmig sei, so muss die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \cos(h, n) & \cos(h, l) & \cos(h, m) \\ \cos(t, n) & \cos(t, l) & \cos(t, m) \\ \cos(b, n) & \cos(b, l) & \cos(b, m) \end{vmatrix} = +1$$

stattfinden, was für

$$(11) \qquad \varepsilon = +1$$

eintritt. Wäre die Determinante gleich -1, so würde man an Stelle der gewählten Richtung der Flächennormale die entgegengesetzte bevorzugen und damit vermöge (3) und (4) auch die positiven Rich-

tungen von l und m umkehren; dann würden alle Elemente der Determinante ihr Zeichen wechseln.

Führt man jetzt die Winkel α, α', ξ etc. wieder ein, so wird z. B.

$$\cos(h,n) = \cos\alpha''\cos\xi + \cos\beta''\cos\eta + \cos\gamma''\cos\zeta = \Sigma\cos\alpha''\cos\xi,$$

und es ergibt sich aus (7) bis (11) folgendes Formelsystem:

$$(12)\qquad \begin{cases} \Sigma\cos\alpha\cos\xi = 0 \\ \Sigma\cos\alpha\cos\xi' = \sin\psi \\ \Sigma\cos\alpha\cos\xi'' = \cos\psi \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \Sigma\cos\alpha'\cos\xi = \sin\varphi \\ \Sigma\cos\alpha'\cos\xi' = \cos\psi\cos\varphi \\ \Sigma\cos\alpha'\cos\xi'' = -\sin\psi\cos\varphi \end{cases}$$

$$(14)\qquad \begin{cases} \Sigma\cos\alpha''\cos\xi = \cos\varphi \\ \Sigma\cos\alpha''\cos\xi' = -\cos\psi\sin\varphi \\ \Sigma\cos\alpha''\cos\xi'' = \sin\psi\sin\varphi. \end{cases}$$

§ 98.

Bildet man die Differentiale der letzten Gleichungen und benutzt diese Gleichungen selbst, sowie die Frenet'schen Formeln [§ 89 (12, 17, 18)], so erhält man folgende drei unabhängigen Relationen:

$$(1)\qquad \cos\psi\, d\sigma + \cos\varphi\, d\omega = 0$$

$$(2)\qquad d\sigma' - \sin\varphi\, d\omega - d\psi = 0$$

$$(3)\qquad \sin\psi\, d\sigma - d\omega' + d\varphi = 0.$$

Sie lassen nach Division mit ds sich schreiben:

$$(4)\qquad \cos\psi\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{\cos\varphi}{r}$$

$$(5)\qquad \frac{d\sigma'}{ds} = \frac{d\psi}{ds} + \frac{\sin\varphi}{r}$$

$$(6)\qquad \frac{1}{r'} = \frac{d\varphi}{ds} + \sin\psi\frac{d\sigma}{ds}.$$

Von den Folgerungen, welche aus diesen Gleichungen gezogen werden können, sollen einige besonders wichtige hervorgehoben werden. Zunächst ergibt sich durch Elimination von $\frac{d\sigma}{ds}$ aus (4) und (6), wenn $\cos\psi$ nicht Null ist, eine Relation zwischen der ersten und zweiten Krümmung und den beiden eingeführten Winkelgrössen:

$$(7)\qquad \frac{1}{r'} = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\operatorname{tg}\psi\cos\varphi.$$

Eliminirt man ferner ψ und $\frac{d\sigma}{ds}$ aus (4, 6) und der Gleichung § 96 (7) (nach Substitution von R' für r'), benutzt sodann den Meusnier'schen Satz, so wird

$$\left(\frac{1}{r'} - \frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \left(\frac{1}{R'}\right)^2. \tag{8}$$

Hieraus folgt, dass für $\varphi = \text{const.}$, oder wenn die Hauptnormale längs der Curve mit der Flächennormale einen constanten Winkel bildet, die geodätische Torsion ihrem absoluten Werte nach mit der zweiten Krümmung übereinstimmt.

Wird $\sin\psi = 0$, oder fallen t und l zusammen (abgesehen von den positiven Richtungen), so kommt

$$dx : dy : dz = dX : dY : dZ,$$

eine Proportion, welche umgekehrt das Verschwinden von $\sin\psi$ nach sich zieht. Sie kennzeichnet die betrachtete Curve als Krümmungslinie. Führt man $\sin\psi = 0$ in (6) ein, so entsteht

$$\frac{1}{r'} = \frac{d\varphi}{ds} \quad \text{oder} \quad d\omega' = d\varphi. \tag{9}$$

Es sei nun die Krümmungslinie speciell eine ebene, also $\frac{1}{r'} = 0$. Man überzeugt sich leicht, dass für diese Annahme die Gleichung (3) oder (6) noch besteht, obgleich die Formeln § 89 (17) ihre Giltigkeit verlieren. Aus (9) folgt $\varphi = \text{const.}$, d. h.: Wenn eine Krümmungslinie eben ist, so bildet ihre Ebene mit der Flächennormale (oder mit der Tangentialebene) einen constanten Winkel.

Die Gleichungen (1) und (2) ergeben für $\cos\psi = \pm 1$, $d\psi = 0$, $d\varphi = 0$:

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \pm \operatorname{tg}\varphi = \text{const.} \tag{10}$$

Um diese Gleichung zu deuten, beachten wir, dass die Flächennormalen längs einer Krümmungslinie Tangenten einer zweiten Curve sind. Aus der Zusammenstellung von § 97 (3) mit § 89 (12) geht sodann hervor, dass für diese die Winkel ξ'', η'', ζ'' die Hauptnormale, ξ', η', ζ' die Binormale kennzeichnen. Die Grössen $d\sigma$ und $d\sigma'$ stellen den Contingenz- und Torsionswinkel der neuen Curve dar. Mithin folgt: Die Normalen längs einer ebenen Krümmungslinie berühren eine Curve, für welche das Verhältnis der beiden Krümmungen constant ist. Eine solche Curve ist aber eine allgemeine Schraubenlinie, d. h. eine Linie, welche die erzeugenden Geraden einer Cylinderfläche unter constantem Winkel schneidet.

Betrachtet man die Durchschnittslinie zweier Flächen und be-

zeichnet durch den Index 0 die Grössen, welche sich auf die zweite beziehen, so erhält man aus (7):

$$d\varphi = d\omega' + \operatorname{tg}\psi \cos\varphi \, d\omega$$
$$d\varphi_0 = d\omega' + \operatorname{tg}\psi_0 \cos\varphi_0 \, d\omega,$$

mithin

$$(11) \qquad d(\varphi - \varphi_0) = (\operatorname{tg}\psi \cos\varphi - \operatorname{tg}\psi_0 \cos\varphi_0)\, d\omega.$$

Die linke Seite stellt, wie aus der Bedeutung von φ und φ_0 sofort folgt, das Differential des Winkels der beiden Flächen dar. Setzt man nun zwei der Grössen $\sin\psi$, $\sin\psi_0$, $d(\varphi - \varphi_0)$ gleich Null, so verschwindet, von leicht zu erledigenden Ausnahmefällen abgesehen, auch die dritte. D. h.: Ist die Durchschnittslinie zweier Flächen Krümmungslinie auf beiden, so schneiden sich die Flächen unter constantem Winkel. Und umgekehrt: Schneiden sich zwei Flächen längs einer Curve, welche Krümmungslinie auf einer von ihnen ist, unter constantem Winkel, so ist diese Curve auch Krümmungslinie der zweiten.

Im Besonderen ist jede Curve auf einer Ebene oder Kugel Krümmungslinie der betrachteten Fläche. Daher ergibt sich folgender Satz, welcher den zuerst ausgesprochenen als Specialfall enthält: Ist eine ebene oder sphärische Curve Krümmungslinie einer gegebenen Fläche, so schneidet die Ebene oder Kugel die Fläche unter constantem Winkel; und umgekehrt. —

Man kann die Ueberlegungen des § 97 dadurch vervollständigen, dass man auch die, in der Tangentialebene gelegene Normale der Curve einführt und ihr zwei gerade Linien durch Gleichungen zuordnet, welche den Formeln § 97 (3, 4) analog sind. Die neun Geraden, welche alsdann zu betrachten sind, gruppiren sich zu vieren derart, dass eine Gruppe der Tangentialebene, eine der Normalebene der Curve und eine derjenigen Normalebene der Fläche angehört, welche durch die Curventangente hindurchgeht. Die Beziehungen dieser Geraden unter einander sollen jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Literatur.

Beltrami, Ricerche di analisi applicata alla geometria [Giornale di Matematiche, Vol. 2, 3 (1864—65)].

Christoffel, Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades [Journal f. Math., Bd. 70 (1869), p. 46].

Euler, Recherches sur la courbure des surfaces [Mém. de l'Acad. de Berlin, T. 16 (1760), p. 119].

Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas [Comm. soc. Gottingensis rec., Vol. 6 (1828); Werke Bd. 4, p. 217].

— Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird [Astron. Abh. herausg. v. Schumacher, Heft 3 (1825); Werke Bd. 4, p. 189].

Meusnier, Sur la courbure des surfaces [Mém. de Math. de l'Acad. des Sciences, Paris, T. 10 (1785), p. 477].

Monge, Application de l'analyse à la géométrie. Paris 1807.

Weingarten, Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen [Journal f. Math. Bd. 59 (1861), p. 382].

— Ueber die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen [Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin, 1884].

Alphabetisches Sachregister.

	Seite
Abbildung, conforme	130—132.
„ eines Rotationsellipsoids auf eine Ebene	132—134.
Absolute Functionen	250.
Abwickelung	75—77, 224, 232, 233, 249.
Asymptotische Richtungen, Asymptotencurven	37, 122, 226—228, 257.
Asymptotencurven als Coordinatenlinien	123, 126—127.
„ auf Flächen 2 Grades	124.
„ auf geradlinigen Flächen	123, 124.
„ auf Rotationsflächen	125.
Biegung s. Abwickelung	
Biegungsinvarianten s. Absolute Functionen.	
Binormale	238.
Conjugirte Tangenten	54—58, 102—103.
Coordinatenlinien (Definition)	2.
Coordinatenwinkel	6.
Covarianten	183, 195, 198—200, 202—203.
Curven auf Flächen (Darstellung)	2, 16, 238.
Differentialformen, bilineare	164—165, 185—186.
„ cubische	197—198, 201—204, 214.
„ quadratische	160—164, 168—175, 182—185, 187.
Differentialparameter 1. und 2. Ordnung	178—182, 244—247.
Doppelverhältnis von vier Tangenten	187—192, 202.
Dupin'scher Kegelschnitt	49—56.
Dupin'scher Satz	120.
Ebene Schnitte	22, 262—263.
Einheitskugel s. Gauss'sche Kugel.	
Ellipsoid	3, 53, 109, 132, 143, 148, 211.
Elliptische Coordinaten	114, 212—213.
Euler'scher Satz	35, 42.
Evoluten	209—234, 236—237, 256 257.
Frenet'sche Formeln	240—241.
Fundamentalgleichungen	81—83, 192, 194, 197, 206.
Fundamentalgrössen 1. Ordnung	5, 6, 12—14, 39.
„ 2. Ordnung	24, 27—28, 40, 58—60, 162
„ 3. Ordnung	95—97.
„ der Gauss'schen Kugel	64—67.

	Seite
Gauss'sche Kugel	61, 64.
Gauss'scher Satz	75, 81, 176.
Geodätische Kreise	151.
„ Krümmung	243—257.
„ Linien	139—140, 142—143, 149—159, 232, 257—258.
„ „ auf dem Ellipsoid	143—147.
„ „ auf den Krümmungsmittelpunktsflächen	223.
„ „ auf der Kugel	143.
„ „ auf Rotationsflächen	147—149, 154.
„ Parallelcurven	153, 155—158, 256.
„ Torsion	258, 262.
Geradlinige Flächen	123, 230, 233.
Hamilton'scher Satz	71.
Harmonische Lage von Flächentangenten	188.
Hauptnormale	238—239.
Hauptkrümmungsradien	32, 40, 44—45, 98—99.
Hauptschnitte und Haupttangenten	31, 33, 40, 41, 189.
Haupttangentencurven s. Krümmungslinien	
Hyperboloide	53, 113, 124.
Indicatrix s. Dupin'scher Kegelschnitt.	
Inflexionstangenten	37, 55.
Invariable Functionen	250.
Invarianten	162, 173, 182, 195, 198—200, 201.
Involution von Flächentangenten	190, 203.
Isometrische Curven	115, 127—130, 134—136, 179—181, 255.
„ „ als Coordinatenlinien	136—137.
Kegel 2. Grades	53.
Kettenlinie, Rotationsfläche der	48, 125, 233—234.
Kreispunkte	33, 40, 42, 48, 52, 88, 108, 109, 210.
Krümmung (erste) einer Curve	239, 242.
„ (zweite) s. Torsion	
Krümmungslinien	106—109, 119—120, 256, 262—263.
„ der Mittelpunktsflächen 2. Grades	109—114.
„ als Coordinatenlinien	116—118, 204—206.
Krümmungsmass	62, 72—75, 175, 177, 248.
Flächen von constantem Krümmungsmass	227, 233, 237.
Krümmungsmittelpunktsfläche s. Evolute.	
Kürzeste Linien	137—138, 140—142.
Linienelement (Definition	5.
Liouville'scher Satz	149—151.
Meridiane s. Rotationsflächen.	
Meusnier'scher Satz	25, 239.
Minimalflächen	182, 234.

	Seite
Monge'sche Flächen	220, 230.
Normale	19—22, 215, 259.
Normale, Richtungscosinus der	21—22, 27—30, 66.
Normalen, benachbarte	67—71.
Normalensystem (Bedingung)	72.
Normalschnitte	24—27, 35—38, 40, 92.
Orthogonale Coordinaten	6, 100—102.
Orthogonalflächen	120—122.
Orthogonal-geodätische Coordinaten	153, 223, 228, 256.
Orthogonalität zweier Richtungen oder Curven	15, 17.
Orthogonalschaar einer gegebenen	102, 180—181.
Osculation der Flächen	86—92.
Paraboloide	53, 89, 124.
Parallelflächen	234—237.
Parallelkreise s. Rotationsflächen.	
Rotationsflächen	45—49, 116, 125, 147, 154, 211, 220, 224, 232, 233—234, 256.
Schraubenfläche	124, 233.
Singuläre Punkte und Linien	19, 210.
Tangentialcoordinaten	84—86.
Tangentialebene	8, 18—19.
Torsion	239, 257—258, 262.
Totalkrümmung eines Flächenstückes	61.
Weingarten'sche Flächen	184, 220—221, 223—224, 227, 233—234.
Weingarten'scher Satz	224, 225, 232, 256.
Winkel zweier Richtungen auf einer Fläche	9.
Winkel zweier Curven auf einer Fläche	10, 15—17.
Winkelhalbirungslinien eines Tangentenpaares	189.
Zwischenparameter	178.

MAY 3 1 1990
MATH-COMP. SCI. LIB.

DATE DUE			
JUL 12 1990			
OCT 19 1990			
NOV 09 1990			
DEC 05 1990			

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004

STANFORD UNIVERSITY LIBRARY

To avoid fine, this book should be returned on or before the date last stamped below

JAN 29 1963

JAN 30 1969

~~SEP 11 2002~~

~~5/27~~

MAY 25 2005

371552

EDWIN M. BLAKE,
BROOKLYN, N. Y.

CLASS

No. 341

3 6105 002 054 802
Stanford University Libraries

MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY